

MATTHIEU LOUMAIGNE

# ONDES ET VIBRATIONS

L3 - UNIVERSITÉ D'ANGERS - DÉCEMBRE 2018





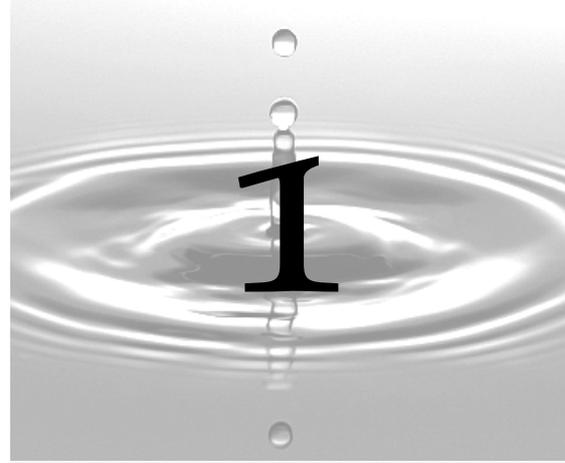
# Table des matières

<b>1</b>	<b>L'oscillateur harmonique en régime libre</b>	<b>7</b>
1.1	Masse-ressort . . . . .	7
1.1.1	Équation différentielle . . . . .	8
1.1.2	Mouvement harmonique . . . . .	9
1.1.3	Aspects énergétiques . . . . .	10
1.2	Le pendule simple . . . . .	11
1.2.1	Équation différentielle . . . . .	11
1.2.2	Cas des petites oscillations (approximation linéaire) . . . . .	12
1.3	Universalité. . . . .	13
1.4	TD 1 . . . . .	15
1.5	CQFR . . . . .	21
<b>2</b>	<b>L'oscillateur harmonique amorti en régime libre et forcé</b>	<b>23</b>
2.1	Frottement fluide . . . . .	24
2.2	Régime libre . . . . .	24
2.2.1	L'équation différentielle . . . . .	24
2.2.2	Résolution mathématique de l'équation différentielle . . . . .	25
2.2.3	Aspect énergétiques . . . . .	27
2.3	Régime Forcé. . . . .	28
2.3.1	Équation différentielle et résolution mathématique . . . . .	29
2.3.2	Régime transitoire et régime permanent . . . . .	33
2.3.3	Le phénomène de résonance . . . . .	35
2.3.4	Aspects énergétiques . . . . .	37
2.3.5	Notion d'impédance mécanique . . . . .	38
2.3.6	Vue d'ensemble . . . . .	38
2.4	Analogie Élec-méca. . . . .	39
2.5	TD 2 . . . . .	41
2.5.1	Retour sur la vibration d'une molécule diatomique . . . . .	42
2.5.2	Retour sur le résonateur de Helmholtz . . . . .	43
2.5.3	Résonance en vitesse . . . . .	43
2.6	CQFR . . . . .	46
<b>3</b>	<b>Oscillateurs couplés</b>	<b>49</b>
3.1	Régime Libre. . . . .	50
3.1.1	Aspects énergétiques . . . . .	53

3.1.2	Équivalent électrocinétique . . . . .	54
3.1.3	Méthodes de résolution plus générales . . . . .	54
3.2	Régime forcé . . . . .	57
3.2.1	Cas symétrique . . . . .	58
3.2.2	Cas général . . . . .	59
3.3	TD 3 . . . . .	61
3.4	CQFR . . . . .	66
<b>4</b>	<b>Du couplage vers la propagation</b>	<b>67</b>
4.1	N osc. couplés . . . . .	68
4.2	N inf., eq. Onde . . . . .	72
4.3	TD4. . . . .	74
4.4	CQFR . . . . .	76
<b>5</b>	<b>Equation d'onde</b>	<b>77</b>
5.1	Onde méca . . . . .	78
5.1.1	Position du problème . . . . .	78
5.1.2	Équation d'onde transversale le long d'une corde	78
5.1.3	Équations d'ondes . . . . .	79
5.2	Onde acoustique. . . . .	80
5.2.1	Équations de couplage . . . . .	81
5.2.2	Équations d'onde . . . . .	83
5.3	Onde coax. . . . .	84
5.3.1	Équations de couplages . . . . .	85
5.4	TD 5 . . . . .	87
5.5	CQFR . . . . .	89
<b>6</b>	<b>Analyse de Fourier</b>	<b>91</b>
6.1	Les opérateurs intégraux . . . . .	92
6.1.1	Comparer deux fonctions . . . . .	92
6.1.2	Comparer une fonction à une famille de fonction	92
6.1.3	Opérateurs intégraux . . . . .	93
6.2	Série de Fourier . . . . .	93
6.2.1	Définition . . . . .	93
6.2.2	Calcul des coefficients . . . . .	94
6.2.3	Exemples de décomposition . . . . .	96
6.3	Transformée de Fourier . . . . .	98
6.3.1	Écriture complexe des séries de Fourier . . . . .	98
6.3.2	Des séries à la transformée de Fourier . . . . .	99
6.3.3	Quelques propriétés de la transformation de Fourier . . . . .	101
6.3.4	Transformations de Fourier de fonctions usuelles	101
6.4	Étude fréquentielle d'un système linéaire . . . . .	103
6.4.1	Décomposition en somme d'ondes planes har- moniques . . . . .	104
6.4.2	Caractérisation expérimentale . . . . .	105
6.5	Comment réaliser une TF . . . . .	105
6.5.1	Un exemple de réalisation mécanique : l'oreille	105

6.5.2	L'algorithme de transformée de Fourier rapide (FFT) . . . . .	106
6.6	TD 6 . . . . .	107
6.7	CQFR . . . . .	109
<b>7</b>	<b>Ondes propagatives</b>	<b>111</b>
7.1	Sol. eq. d'Alembert . . . . .	111
7.1.1	Les solutions : les ondes planes . . . . .	111
7.1.2	Propagation des ondes planes . . . . .	113
7.2	Onde progressive plane et harmonique . . . . .	114
7.2.1	Onde progressive plane . . . . .	114
7.2.2	Onde progressive plane et harmonique . . . . .	114
7.2.3	Périodicités spatiale et temporelle . . . . .	115
7.2.4	La relation de dispersion . . . . .	116
7.2.5	Propriétés . . . . .	116
7.3	Ondes sphériques . . . . .	117
7.4	L'impédance propagative . . . . .	118
7.4.1	Tentative de définition . . . . .	118
7.4.2	Relation de structure et impédance propagative . . . . .	119
7.4.3	Puissance nécessaire à produire une onde . . . . .	120
7.5	Aspect énergétique . . . . .	121
7.5.1	L'énergie . . . . .	121
7.6	TD7. . . . .	122
7.7	CQFR . . . . .	124
<b>8</b>	<b>Réflexion et transmission</b>	<b>125</b>
8.1	Réflexion et transmission à une discontinuité . . . . .	125
8.1.1	Conditions aux limites . . . . .	126
8.1.2	L'onde réfléchie . . . . .	127
8.1.3	L'onde transmise . . . . .	128
8.2	Réflexion et transmission en terme d'impédance . . . . .	128
8.2.1	Cas des ondes mécaniques . . . . .	129
8.2.2	Cas des ondes acoustiques . . . . .	131
8.2.3	Cas des ondes le long d'un câble coaxial . . . . .	132
8.2.4	Généralisation . . . . .	133
8.3	Adaptation d'impédance . . . . .	134
8.4	TD8. . . . .	135
8.5	CQFR . . . . .	139
<b>9</b>	<b>Onde stationnaire</b>	<b>141</b>
9.1	Mise en évidence . . . . .	141
9.1.1	Extrémité fixe . . . . .	141
9.1.2	Extrémité libre . . . . .	143
9.2	Corde fixée . . . . .	144
9.2.1	Utilisation des conditions aux limites . . . . .	144
9.2.2	Analyse harmonique . . . . .	147
9.3	Corde de Melde . . . . .	150

9.4	Aspects énergétiques . . . . .	151
9.5	TD 9 . . . . .	153
9.5.1	Vibrations libres d'une corde . . . . .	153
9.6	CQFR . . . . .	161
<b>10</b>	<b>Milieu abs et dispersif</b>	<b>163</b>
10.1	Dispersion et absorption d'une onde sur une corde . . . . .	163
10.1.1	Prise en compte de forces dissipatives . . . . .	163
10.1.2	Les solutions de l'équation d'onde . . . . .	164
10.1.3	Absorption . . . . .	165
10.1.4	Dispersion . . . . .	165
10.2	Vitesse de phase . . . . .	165
10.2.1	Vitesse de phase . . . . .	165
10.3	Une onde plane monochromatique n'existe pas . . . . .	166
10.3.1	Paquet d'onde . . . . .	167
10.4	Milieu dispersif et paquet d'onde . . . . .	170
10.4.1	Développement limité de la relation de disper- sion . . . . .	170
10.4.2	Milieu non dispersif . . . . .	170
10.4.3	Dispersion peu prononcée . . . . .	170
10.4.4	Dispersion marquée . . . . .	171
10.4.5	Résumer de la situation . . . . .	172
10.5	Un exemple : la relation de dispersion de Klein Gordon . . . . .	173
10.6	TD 10 . . . . .	175
10.7	CQFR . . . . .	178
<b>11</b>	<b>Ondes guidées</b>	<b>179</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>181</b>
<b>A</b>	<b>Élément de correction des TD</b>	<b>183</b>



# 1 L'oscillateur harmonique en régime libre

L'OSCILLATEUR HARMONIQUE, typiquement une masse et un ressort, peut sembler de prime abord assez insignifiant. Et pourtant, il s'agit de la *brique de base* d'un nombre considérable de modèles en physique allant des ondes à la chaleur spécifique des solides en passant aussi par exemple par le rayonnement du corps noir.

Nous verrons dans la suite de ce cours que tous les systèmes oscillants, au voisinage de leur position d'équilibre, aussi compliqués soient-ils, peuvent être décomposés en un ensemble d'oscillateurs harmoniques indépendants que nous appellerons "modes".

Pour commencer, nous partirons de l'indémontable "masse-ressort" et nous allons établir puis résoudre les équations différentielles du mouvement de cet oscillateur. Cela sera notre première rencontre avec le mouvement sinusoïdal aussi appelé mouvement harmonique.

Nous passerons ensuite à l'autre système oscillant canonique : le pendule. Nous verrons qu'il faudra apporter une hypothèse supplémentaire pour obtenir un oscillateur harmonique : un mouvement de faible amplitude autour du point d'équilibre.

Dans la foulée, nous généraliserons alors ce constat à l'ensemble des systèmes oscillants.

## 1.1 Le système masse-ressort

Considérons le système représenté sur la figure 1.1 : une masse  $m$  est attachée à un ressort de raideur  $k$ . On considère un système parfait sans frottement solide sur le support ni frottement de l'air : le système est conservatif. D'autre part, la force de pesanteur est compensée par la réaction normale du support. Enfin, la masse  $m$  est lâchée de la position  $X_0$  sans vitesse initiale. Dit autrement, aucune force extérieure supplémentaire n'est appliquée à la masse  $m$  qui est livrée à elle-même : on parle d'oscillation libre.

## Sommaire

1.1	Masse-ressort . . . . .	7
1.2	Le pendule simple . . . . .	11
1.3	Universalité . . . . .	13
1.4	TD 1 . . . . .	15
1.5	CQFR . . . . .	21

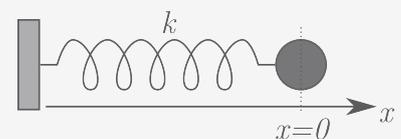


FIGURE 1.1: Schéma du système masse ressort

## 1.1.1 Équation différentielle

1. **NB** : Tout au long du poly, les vecteurs seront notés en caractères gras  $F \leftrightarrow \vec{F}$

Selon l'axe  $x$ , la masse  $m$  est soumise uniquement à la force de rappel du ressort. Cette dernière peut être décrite par la loi de Hooke (voir l'encart 1) et vaut  $F = -kx\mathbf{e}_x$ .

## Encart 1 Loi de Hooke

La Loi de Hooke décrit empiriquement le comportement linéaire d'un ressort.

Sa forme générale est :

$$F = -k(l - l_0)\mathbf{e}_x$$

où  $l_0$  est la longueur à vide du ressort (i.e. sans contrainte) et  $l$  la longueur du ressort étiré ou comprimé. Il est très courant de noter  $\Delta x = l - l_0$  que l'on peut même remplacer par  $x$  en changeant l'origine de l'axe  $x$  qui n'est plus au niveau du support mais à  $x(0) = l_0$ , position de repos du ressort.

D'un point de vue pratique, le signe moins pose souvent problème aux étudiants. Voici une méthode simple qui vous permettra d'avoir plus d'une chance sur deux pour savoir s'il faut ou non mettre un signe moins. Prenons le cas de la figure 1.1, si on déplace la masse dans le sens  $x > 0$ , c'est à dire que l'on étire le ressort (compte tenu de l'orientation de l'axe  $x$ ), puis qu'on la relâche; on sait alors intuitivement que la masse va se diriger vers les  $x < 0$ . Il faut donc que la force  $F$  ramène la masse  $m$  vers les  $x$  négatifs. Il faut donc un signe moins. On peut faire un raisonnement similaire si on déplace la masse dans le sens  $x < 0$  (compression), on retrouve le signe  $-$ .

Le système a un seul degré de liberté qui est décrit par la coordonnée  $x$  de la masse  $m$ . En appliquant la seconde loi de Newton, aussi appelée Principe Fondamental de la Dynamique (PFD), à la masse  $m$ , on obtient en projection sur l'axe  $x$  :

$$m\ddot{x} = -kx$$

où le double point signifie dérivée seconde par rapport au temps :

$$\ddot{x} \equiv \frac{d^2x}{dt^2}$$

2. L'autre équation différentielle à connaître par cœur est

$$\dot{x} + \frac{x}{\tau} = 0$$

que l'on retrouve par exemple dans la décharge d'un condensateur. La solution (à connaître par cœur donc) est  $x(t) = x_0 \exp(-\frac{t}{\tau})$  où  $x_0$  est déterminé par une condition initiale (généralement à  $t = 0$ )

L'équation différentielle du mouvement est donc :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1.1)$$

où on a posé  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  qui est homogène à une pulsation (inverse d'un temps). Tout bon physicien se doit de connaître par cœur la solution de cette équation différentielle<sup>2</sup>. Une méthode de résolution est néanmoins donnée dans l'encart 2.

## Encart 2 Résolution de l'équation différentielle harmonique

On cherche les solutions de l'équation différentielle 1.1 sous la forme<sup>a</sup>  $x(t) = x_0 e^{st}$  (car la fonction exponentielle a un comportement extrêmement simple avec la dérivation : elle est sa propre dérivée). On injecte dans l'équation et on obtient :

$$s^2 x_0 e^{st} + \omega_0^2 x_0 e^{st} = 0$$

$$s^2 = -\omega_0^2$$

$s$  est donc imaginaire pur et peut valoir soit  $s_1 = i\omega_0$  ou  $s_2 = -i\omega_0$ .

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle 1.1 forme un espace vectoriel de dimension deux. Nous venons tout juste de trouver les deux vecteurs propres de cet espace. Il s'agit de  $e^{i\omega_0 t}$  et  $e^{-i\omega_0 t}$ . On forme donc une solution (complexe) de l'équation 1.1 en écrivant une combinaison linéaire des deux vecteurs propres.

$$z(t) = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}$$

Les coefficients de l'équation 1.1 sont réels, la solution  $x(t)$  doit donc aussi avoir des coefficients réels et

$$x(t) = \text{Re}[z(t)] = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

<sup>a</sup> En terme plus technique nous sommes en train d'effectuer la transformée de Laplace de l'équation.

## 1.1.2 Mouvement harmonique

La solution générale de l'équation 1.1 est :

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \quad (1.2)$$

où  $A$  et  $B$  sont des coefficients déterminés par les conditions initiales. La solution peut aussi se mettre sous la forme (voir exercice 1.4)

$$x(t) = X_0 \cos(\omega_0 t + \Phi) \quad (1.3)$$

qui est une écriture mettant en avant les caractéristiques physiques de l'oscillation :

*L'amplitude maximum*  $X_0$  de l'oscillation (le cosinus étant borné à 1 en valeur absolue)

*La phase*  $\Phi$  de l'oscillation, c'est à dire un décalage tel que à  $t = 0$ , l'oscillateur n'est pas à la position<sup>3</sup> à  $x_{t=0} = X_0$  mais à  $x_{t=0} = X_0 \cos \Phi$

3. Un déphasage de  $\Phi = \pi/2$  conduit à  $x(t) = X_0 \cos(\omega_0 t + \pi/2) = -X_0 \sin(\omega_0 t)$

Les constantes  $A$  et  $B$ , ou, de façon équivalent,  $X_0$  et  $\Phi$ , sont obtenues grâce aux conditions initiales. Il y a deux inconnues et il faut donc

deux équations. La première porte généralement sur la position de la masse  $m$  à  $t = 0$  et l'autre sur la vitesse au même instant. Des cas particuliers seront vus en TD, abordons ici le cas général. A  $t = 0$ , le terme en  $\sin \omega_0 t$  est nul :

$$x_{t=0} = A \cos(\omega_0 \times 0) + B \sin(\omega_0 \times 0) = A$$

d'autre part, on peut exploiter la vitesse initiale :  $\dot{x}_{t=0}$

$$v_{t=0} = \dot{x}_{t=0} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 \times 0) + B\omega_0 \cos(\omega_0 \times 0) \iff B = \frac{v_{t=0}}{\omega_0}$$

Au final, la position de la masse  $m$  évolue au cours du temps selon l'équation :

$$x(t) = x_{t=0} \cos(\omega_0 t) + \frac{v_{t=0}}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

L'évolution ne contient qu'une seule fréquence (une seule pulsation pour être exacte) :  $\omega_0$ , d'où son nom de "harmonique". Le mouvement est sinusoïdale.

L'expression de la pulsation  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  dépasse largement le cadre du système masse-ressort. On peut la généraliser à énormément de systèmes allant de l'oscillation d'un électron aux secousses sismiques d'un immeuble. Il est donc intéressant de retenir cette formule et de se souvenir que la pulsation propre  $\omega_0$  d'un oscillateur augmente avec sa raideur et diminue avec sa masse.

### 1.1.3 Aspects énergétiques

L'approche la plus intuitive pour comprendre d'où vient cette oscillation passe par l'étude des échanges d'énergie au sein du système.

L'énergie cinétique vaut, comme il se doit,  $E_c = 1/2mv^2$ , la vitesse  $v(t)$  étant obtenue en dérivant  $x(t)$  par rapport au temps<sup>4</sup> :

$$E_c(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}mX_0^2\omega_0^2 \sin^2 \omega_0 t$$

L'énergie potentielle est celle contenue dans le ressort lorsque celui-ci se comprime ou s'allonge. Elle vaut<sup>5</sup> :

$$E_p(t) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kX_0^2 \cos^2 \omega_0 t$$

Les deux termes sont en opposition de phase, l'énergie cinétique est en sinus, alors que l'énergie potentielle est en cosinus. Comme on peut le voir sur la figure 1.2, lorsque l'énergie cinétique est maximum, c'est à dire lorsque la masse  $m$  est en  $x = 0$ , l'énergie potentielle est minimale. En effet, en  $x = 0$ , le ressort n'est ni comprimé, ni étiré et aucune énergie potentielle n'est stockée dans le ressort, a contrario, la vitesse de la masse  $m$  est maximale et par conséquent l'énergie cinétique aussi. A l'inverse, lorsque la masse  $m$  atteint son amplitude maximale en  $x = \pm X_0$ , l'énergie cinétique est nulle et l'énergie potentielle est maximale. En effet, la vitesse est alors nulle et le ressort est comprimé (ou étiré) au maximum.

4. Nous prenons ici dans l'équation 1.3 un déphasage nul :  $\phi = 0$

5. La force de Hook  $F = -kx$  dérive de l'énergie potentielle  $E_p$  tel que  $F = -\text{grad}E_p$ .

On a alors  $kx = \frac{dE_p}{dx}$  et  $E_p = \frac{1}{2}kx^2$

On voit donc qu'il y a un *échange* permanent et régulier entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle. Cet échange est intimement lié au phénomène d'oscillation. De même qu'il faut associer mentalement un mouvement sinusoïdal à un oscillateur harmonique, il faut aussi garder l'image de ce "transfert oscillant" entre les deux formes d'énergie. On pourrait même presque considérer ce transfert oscillant comme le mécanisme interne de l'oscillation.

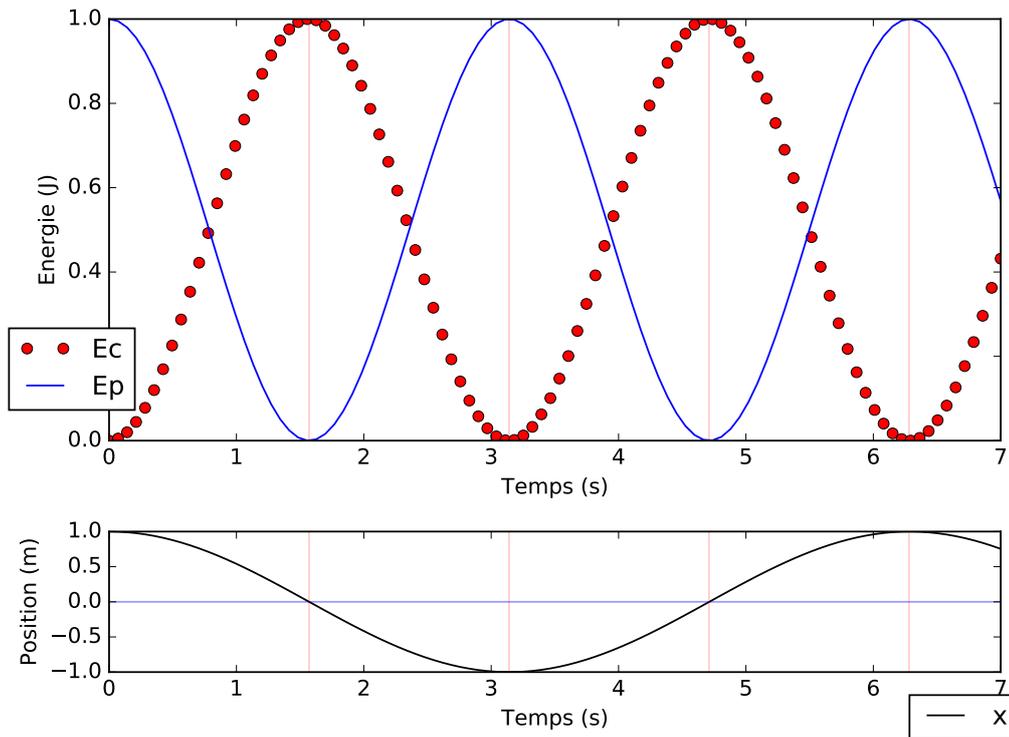


FIGURE 1.2: Évolution de l'énergie de l'oscillateur au cours du temps

### 1.2 Le pendule simple

Un pendule simple<sup>6</sup> est un système composé d'une masse  $m$  reliée à un fil sans masse, inextensible, de longueur  $l$ , à un point fixe A (voir figure 1.3). On néglige les frottements de l'air, à nouveau le système est conservatif.

6. le cas du pendule pesant est traité en annexe A

#### 1.2.1 Équation différentielle

Le système a un seul degré de liberté. En l'occurrence la rotation autour de l'axe  $z$ , repérée par la coordonnée  $\theta$ . Il suffit donc d'une seule équation différentielle pour obtenir l'évolution du système. Le moyen le plus rapide n'est pas d'appliquer le PFD ni même le théorème du moment cinétique (voir exercice 1.4) mais d'écrire que l'énergie mécanique du système se conserve au cours du temps.

Au vu de la géométrie du problème, il est naturel de travailler en coordonnées polaires. La norme de la vitesse de la masse  $m$  s'écrit

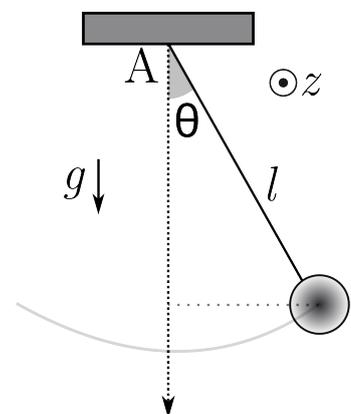


FIGURE 1.3: Schéma d'un pendule simple

alors  $v = l\dot{\theta}$  et l'énergie cinétique vaut :

$$E_c = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

Concernant l'énergie potentielle, la tension du fil est en permanence perpendiculaire au mouvement, elle ne travaille donc pas<sup>7</sup>. L'énergie potentielle est donc seulement stockée sous forme d'énergie gravitationnelle. En prenant la référence (i.e le zéro) à  $\theta = 0$ , l'énergie potentielle de pesanteur vaut :

$$E_p = mgh = mg(l - l \cos \theta)$$

L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et potentielle. La traduction mathématique de sa constance au cours du temps est que sa dérivée par rapport au temps est nulle. Ce qui conduit<sup>8</sup> à :

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{d(E_c + E_p)}{dt} = \frac{1}{2}ml^2 2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgl\dot{\theta} \sin \theta = 0$$

et, après simplification, nous obtenons l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \tag{1.4}$$

L'équation 1.4 contient une fonction non-linéaire en l'occurrence  $\sin \theta$ . Une fonction n'est pas linéaire<sup>9</sup> lorsque cette fonction appliquée à une somme n'est pas égale à la somme de la fonction appliquée à chacun des termes et c'est bien le cas ici  $\sin(\theta_1 + \theta_2) \neq \sin \theta_1 + \sin \theta_2$ . La non-linéarité d'une équation différentielle peut paraître un simple détail d'ordre mathématique mais, en fait, elle change radicalement le comportement du système physique.

### 1.2.2 Cas des petites oscillations (approximation linéaire)

L'équation 1.4 n'est pas soluble analytiquement, nous allons l'approximer pour qu'elle redevienne linéaire<sup>10</sup>.

Le développement en série de la fonction sinus est le suivant<sup>11</sup> :

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots + (-1)^{-n} \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(\theta^{2n+2})$$

Plus l'angle  $\theta$  est petit et plus les termes correctifs en  $(-1)^{-n} \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}$ , sont négligeables. Pour un angle initial  $\Theta_0$  assez petit, typiquement moins de  $20^\circ$  (cf exercice 1.4 et figure 1.4), on peut se contenter du premier terme du développement et  $\sin \theta \simeq \theta$ . L'équation différentielle est alors à nouveau linéaire :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

avec cette fois ci  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ . L'équation étant la même que 1.1, la solution est de la même forme :

$$\theta(t) = \Theta_0 \cos(\omega_0 t + \Phi)$$

7. Une autre façon de voir les choses est que la corde reste rigide et ne stocke aucune énergie potentielle sous forme élastique.

8. Attention, si  $\cos \theta$  est une fonction de  $\theta$  et sa dérivée par rapport à  $\theta$  vaut bien  $\frac{d \cos \theta}{d \theta} = -\sin \theta$ .

Les choses se compliquent légèrement si on regarde, comme c'est le cas ici, la dérivée par rapport au temps ( $\theta$  est ici une fonction du temps :  $\theta(t)$ )

Nous avons alors à faire à une dérivée composée et

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$$

où ici nous avons  $g : \theta \mapsto \cos \theta$  et  $f : \theta \mapsto \theta(t)$  et donc  $(g' \circ f) \leftrightarrow -\sin \theta$  et  $f' \leftrightarrow \dot{\theta}$  de telle sorte que :

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f' \leftrightarrow (-\sin \theta)\dot{\theta}$$

On pourra plutôt utiliser la méthode suivante avec une écriture type "physicien" :

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{df}{d\theta} \dot{\theta}$$

et donc ici  $\frac{d \cos \theta(t)}{dt} = -\sin(\theta) \times \dot{\theta}$

9. Voir aussi l'encart page 30

10. Nous avons aussi fait implicitement une approximation pour que l'équation différentielle du système masse-ressort soit linéaire. La loi de Hooke n'est valable que pour des petits étirements du ressort. Plus on étire le ressort et plus le comportement devient non linéaire. La norme de la force de Hooke devrait plutôt s'écrire  $F = kx + k_2x^2 + k_3x^3 + \dots$  avec  $k_3 \ll k_2 \ll k$

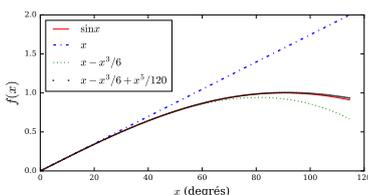


FIGURE 1.4: Illustration du développement limité de la fonction sinus. L'ordre 1 ( $f(x) = x$ ) est valable jusqu'à environ  $\Theta_0 = 20^\circ$

11. C'est d'ailleurs par cette méthode que les calculatrices donnent une valeur du sinus

avec  $\Theta_0$  et  $\Phi$  déterminés par les conditions initiales.

Mentionnons deux points assez contre-intuitifs :

- La période des oscillations  $T = 2\pi\sqrt{l/g}$  ne dépend pas de la masse  $m$ . Que l'on accroche une balle de ping-pong ou un boulet de canon au bout du pendule, la période reste la même. Il faut tout de même préciser que la forme géométrique du pendule a une incidence sur sa période (voir l'annexe A sur le pendule pesant)
- La période des oscillations est indépendante des conditions initiales (vitesse initiale et angle initial). Même en lançant très fort le pendule (tout en restant dans la limite des  $20^\circ$ ), la pulsation reste la même <sup>12</sup>.

### 1.3 De l'universalité de l'oscillateur harmonique

L'exemple du pendule simple semble suggérer que l'on peut toujours se ramener à l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique pour peu que l'on se limite aux oscillations de faible amplitude. Nous allons maintenant généraliser cette observation à l'ensemble des oscillateurs.

Un oscillateur oscille autour d'une position d'équilibre. Il faut donc revenir à la définition d'un équilibre. On parle de la position d'équilibre lorsque le système est dans un *minimum d'énergie potentielle*. On peut par exemple imaginer une bille au fond d'un bol. Si on donne une énergie cinétique inférieure à celle nécessaire pour faire sortir la bille du bol <sup>13</sup>, alors la bille oscille au fond du bol qui est bien le minimum d'énergie potentielle de pesanteur du système.

L'étape suivante est de se rendre compte que qu'elle que soit la forme du bol on peut toujours approximer le fond du bol par une fonction parabolique (voir figure 1.5 et 1.6).

Traduisons ces idées mathématiquement :

- Autour d'une position d'équilibre l'énergie potentielle est à son minimum <sup>14</sup> :

$$\frac{dE_p}{dx}(x_0) = 0$$

où  $x$  est la coordonnée qui repère le mouvement unidimensionnel du système et  $x_0$  la position du minimum <sup>15</sup>.

- On s'intéresse aux petites oscillations autour de la position d'équilibre  $x_0$ . On va donc effectuer un développement limité <sup>16</sup> de l'énergie potentielle au voisinage de  $x_0$ . On se limite à l'ordre 2 ce qui revient à dire que l'on approxime le fond du puits de potentiel par une parabole (cf fig 1.5) :

$$E_p(x) = E_p(x_0) + (x - x_0)\frac{dE_p}{dx}(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2}\frac{d^2E_p}{dx^2}(x_0) + \dots$$

En prenant en compte que, puisque nous sommes à l'équilibre :

$$\frac{dE_p}{dx}(x_0) = 0$$

12. La légende veut que ce soit Galilée (1564-1642) qui est fait (et publiée) ces observations pour la première fois. Il s'ennuyait lors d'une messe à Pise et il s'est mis à observer les oscillations des différents lustres de la cathédrale. Il a ainsi pu mettre au point un pendule pour avoir une référence de temps pour ses expériences portant sur la mécanique des corps (il utilisait auparavant son pouls ...).

13.  $1/2mv^2 < mgh_{bol} \iff v < \sqrt{2gh_{bol}}$

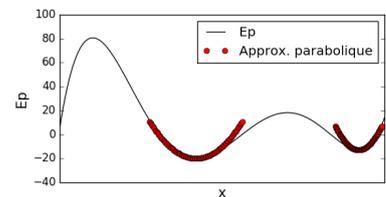


FIGURE 1.5: Approximation par une parabole de deux des minima d'une énergie potentielle quelconque

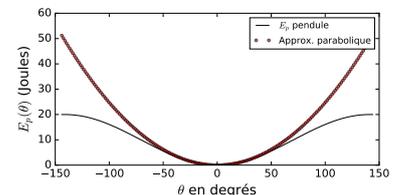


FIGURE 1.6: Approximation par une parabole de l'énergie potentielle d'un pendule simple

14. Il faut aussi ajouter  $\frac{d^2E_p}{dx^2}(x_0) > 0$

15. NB : on dérive par rapport à la position et non au temps. La position d'équilibre est une quantité spatiale et non temporelle.

16. cf Annexe A

17. La fonction  $f(x) = \frac{d^2 E_p}{dx^2}$  est évaluée au point d'équilibre  $x_0$ . Il s'agit d'une constante que l'on peut noter  $k$  avec  $k = f(x_0)$

puis en posant la constante <sup>17</sup>

$$k = \frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_0) \quad (1.5)$$

et enfin en se limitant aux termes d'ordre deux dans le développement :

$$E_p(x) = E_p(x_0) + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$$

A une constante près ( $E_p(x_0)$ ), on retombe sur la forme élastique de l'énergie potentielle !

On peut alors soit revenir à la force associée à cette énergie potentielle,  $F = -k(x - x_0)x$  et suivre le raisonnement du 1.1.1, ou passer par la constance de l'énergie mécanique comme au 1.2.1. Dans les deux cas, nous retombons sur l'équation différentielle <sup>18</sup> de l'oscillateur harmonique 1.1 :

18. Insistons sur la présence d'un signe + dans l'équation différentielle. Un signe -, c'est à dire l'équation différentielle :

$$\ddot{x} \ominus \omega_0^2 x = 0$$

ne conduit pas à un mouvement oscillant mais un à un mouvement *explosif* !

Équation différentielle universelle de l'oscillateur harmonique

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

N'ayant fait aucune hypothèse sur la forme du potentiel d'énergie  $E_p(x)$ , on peut généraliser et dire que :

Oscillateur harmonique

Tout système oscillant avec une petite amplitude autour de sa position d'équilibre peut être décrit par un oscillateur harmonique.

## 1.4 TD 1

## Questions de cours

1. Donner l'équation différentielle gouvernant le comportement d'un oscillateur harmonique.
2. Donner la solution générale de cette équation.
3. Dessiner l'allure de l'énergie cinétique et celle de l'énergie potentielle au cours du temps.
4. Obtenir l'équation différentielle régissant le comportement du pendule simple en utilisant la conservation de l'énergie mécanique.
5. Transformer cette équation en développant le sinus jusqu'à l'ordre 3.
6. Qu'est ce que l'isochronisme des oscillations? Est-ce toujours le cas pour un pendule simple?
7. Montrer que tout système oscillant autour de sa position d'équilibre avec de petites oscillations peut être décrit par un oscillateur harmonique.

## Système masse-ressort avec la gravité

Un système masse-ressort semblable à celui de la section 1.1 est suspendue à un plafond (voir figure 1.7).

1. On étudie d'abord le système à l'équilibre (figure 1.7 a et b).
  - (a) Déterminer la position d'équilibre  $l_{\text{eq}}$  en fonction de la longueur initiale  $l_0$  et le poids  $mg$ .
  - (b) Comment déterminer expérimentalement la valeur  $k$  de la constante de raideur du ressort?
2. On étudie maintenant le système lorsque la masse  $m$  est en mouvement (figure 1.7 c).
  - (a) Appliquer le PFD à la masse  $m$ .
  - (b) En injectant l'expression portant sur  $l_{\text{eq}}$  obtenue à l'équilibre et montrer que l'action de la pesanteur n'est que de décaler la position d'équilibre autour de laquelle la masse  $m$  oscille.
  - (c) Retrouver l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique.
3. Donner l'équation du mouvement  $z(t)$ , l'expression de la vitesse  $v(t)$  et de l'accélération  $a(t)$  avec les conditions initiales suivantes  $z(t=0) = x_0$  et  $v(t=0) = 0$ .

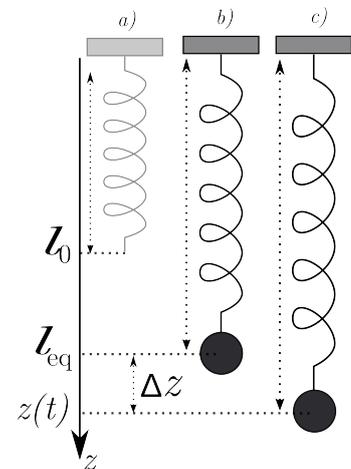


FIGURE 1.7: Schéma du système masse-ressort vertical (voir exercice A)

## Écriture Amplitude-Phase

Montrer mathématiquement que la solution générale du mouvement d'un oscillateur harmonique à la pulsation  $\omega$ ,  $x(t) = A \cos \omega t +$

$B \sin \omega t$  où  $A$  et  $B$  sont des constantes déterminées par les conditions initiales, peut se mettre sous la forme :

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t = X_0 \cos(\omega t + \Phi)$$

Donner l'expression de  $X_0$  et  $\Phi$  en fonction de  $A$  et  $B$ .

### Association de ressorts

Une masse  $m$  est reliée à un point  $O$  par l'intermédiaire de deux ressorts sans masse et de raideur  $k_1$  et  $k_2$ , montés soit en série<sup>19</sup>, soit en parallèle. Déterminer dans chaque cas la période des petites oscillation.

19. NB : pour le cas en série, il faudra comparer les deux ressorts avec un ressort équivalent et écrire les conditions d'équilibre, notamment pour le point  $A$  se situant entre les deux ressorts.

### Le pendule de Pohl

Le pendule de Pohl est un pendule en torsion que vous allez étudier en TD. Le pendule fonctionne en rotation, il possède un moment d'inertie  $J$ . L'angle de rotation est repéré par la coordonnée  $\theta$ . Le ressort centrale oppose un couple de rotation lorsque le pendule est écarté de la position d'équilibre, le moment de cette force par rapport à l'axe de rotation du pendule est  $M_{\text{axe}} = -C\theta e_z$  où  $e_z$  est un vecteur perpendiculaire au plan de rotation du pendule dirigé dans le sens positif (règle de la main droite). Le système est supposé sans frottement ou, dit autrement, il est conservatif.

1. En utilisant la conservation de l'énergie ou en appliquant le théorème du moment cinétique, établir l'équation différentielle régissant le système.
2. Facultatif – résoudre l'équation différentielle.
3. Donner directement l'expression générale de l'évolution temporelle de la position angulaire  $\theta(t)$ .
4. Le pendule est lâché sans vitesse initiale de la position  $\theta = 10^\circ$ . Donner l'expression de  $\theta(t)$  dans ce cas particulier.

### Retour sur le pendule simple

1. Obtenir l'équation différentielle du pendule simple :
  - En utilisant le fait que le système est conservatif.
  - En appliquant le PFD.
  - En appliquant le théorème du moment cinétique (TMC).
2. Tracer sur un même graphe l'énergie potentielle de la masse  $m$  ainsi que le potentiel harmonique approximé (correspondant au DL à l'ordre 2).
3. A l'aide d'une calculatrice, trouver numériquement pour quelle valeur en degré de l'angle initial  $\theta_{01}$ , l'approximation  $\sin \theta \simeq \theta$  est fautive à plus de 10%, et  $\theta_{02}$  à 5%.

*Pendule sphérique*

On utilise un pendule semblable à celui décrit dans la partie 1.2. Son déplacement n'est maintenant plus limité à un seul degré car il peut se déplacer dans le plan  $xy$ . Il a donc deux degrés de liberté (mais non couplés). A l'équilibre, la corde est verticale, selon  $z$ , et la masse se trouve en  $x = y = 0$ . Comme on se limite aux petits angles, on peut travailler en coordonnées cartésiennes.

1. Écrire le PFD appliqué à la masse  $m$  en considérant qu'elle reste dans le plan  $z = 0$ . La tension de la corde sera exprimée sous la forme  $T = MCT \frac{MC}{l}$  où  $C$  est le point d'accroche du pendule à l'axe  $Z$ .
2. Obtenir les équations différentielles portant sur  $x$  et  $y$ .
3. Étudier le mouvement de la masse  $m$  pour des petites oscillations et en déduire sa trajectoire. Les conditions initiales sont  $x(t = 0) = x_0, y(t = 0) = 0, v_x(t = 0) = 0$  et  $v_y(t = 0) = v_0$ .

*Fréquence propre d'oscillation d'une molécule diatomique*

D'après Brasselet *Mécanique*

La molécule diatomique HCl peut être modélisée selon un axe fixe par deux masses ponctuelles distante de  $r$ . Puisque l'atome de chlore est beaucoup plus lourd que celui d'hydrogène (cf le numéro atomique), il peut être considéré comme fixe ; seul le noyau d'hydrogène de masse  $m$  est alors susceptible de se déplacer, il subit le potentiel d'interaction :

$$E_p(r) = \frac{C}{r^n} - \alpha \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

où  $C, \alpha$  et  $n$  sont des constantes positives que nous allons déterminer (voire figure 1.8). En l'absence de tout champ extérieur, la distance d'équilibre inter-atomique est  $r_0$ . L'énergie minimale à fournir pour dissocier cette molécule sera notée  $E_d$ . On note aussi  $r_0$  le minimum d'énergie potentielle et donc la position d'équilibre local du système.

1. L'expression de l'énergie potentielle  $E_p(r)$  comporte deux termes l'un répulsifs l'autre attractif. Quelles est l'origine physiques de chacun de ces deux termes ?
2. En suivant le raisonnement développé dans la partie 1.3, nous allons exprimer la pulsation  $\omega_0$  des petites oscillations de la molécule, ainsi que l'énergie de dissociation  $E_d$ .
  - Écrire la condition mathématique de l'équilibre en  $r = r_0$
  - Écrire la relation reliant  $k$  et la dérivée seconde de l'énergie potentielle
  - Combiner les deux expressions pour montrer que :

$$k = n(n - 1) \frac{C}{r_0^{n+2}}$$

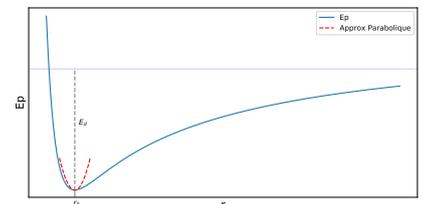


FIGURE 1.8: Modélisation du potentiel d'interaction entre deux atomes (cf exercice 1.4)

- Connaissant "la constante de raideur" de l'oscillateur, obtenir alors l'expression de la pulsation propre de l'oscillateur  $\omega_0$ .
- L'énergie de dissociation  $E_d$ , est l'énergie nécessaire pour déloger le système de son point d'équilibre. Cette énergie est donc égale à la hauteur du puits de potentiel, soit l'énergie potentielle en  $r_0$ . En utilisant les expressions précédentes montrer que :

$$E_d = (n - 1) \frac{C}{r_0^n} = k \frac{r_0^2}{n}$$

3. Des mesures spectroscopiques permettent d'accéder expérimentalement à  $r_0$ ,  $\omega_0$  et  $E_d$ .

Calculer les valeurs des constantes  $C$ ,  $\alpha$  et  $n$ .

Données :  $m = 1.66 \times 10^{-27}$  kg ;  $e = 1.6 \times 10^{-19}$  C,  $r_0 = 1.27 \times 10^{-10}$  m,  $\omega_0 = 5.45 \times 10^{14}$  rad s<sup>-1</sup>,  $E_d = 400$  kJ mol<sup>-1</sup>

### Résonateur d'Helmholtz

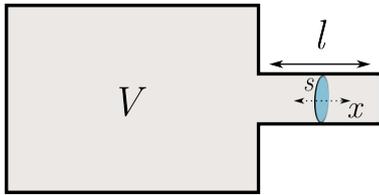


FIGURE 1.9: Schéma d'un résonateur de Helmholtz

Le résonateur de Helmholtz est constitué d'une cavité de grand volume  $V$  reliée à l'atmosphère par un col étroit de section  $s$  et de longueur  $l$  (cf. fig 1.9). On obtient une théorie simple du système en supposant que l'air situé dans le col oscille en bloc, comme un bouchon qui couliserait. Son déplacement par rapport à son état de repos est repéré par  $x(t)$  compté suivant l'axe du col ; sa masse est  $M = \rho ls$ , où  $\rho$  est la masse volumique de l'air.

Le phénomène d'oscillation acoustique provient de l'élasticité de l'air contenu dans le grand volume : si le bouchon d'air situé dans le col est enfoncé vers l'intérieur, la surpression est positive et la force qu'il subit tend à le renvoyer vers l'extérieur ; s'il est déplacé vers l'extérieur, la surpression est négative et la force qu'il subit tend à le renvoyer vers l'intérieur

1. Donner la variation de volume  $\delta V$  en fonction du déplacement  $x$  du bouchon d'air contenu dans le col.
2. La variation de pression  $\delta P$  créée dans la cavité par le déplacement  $\delta V$  peut s'exprimer via la compressibilité (ici adiabatique) de l'air :

$$\chi_s = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_s \simeq -\frac{1}{V} \frac{\delta V}{\delta P}$$

C'est à dire, de combien évolue le volume relatif  $-\frac{1}{V} \delta V$ , lorsque l'on change la pression de  $\delta P$ . Pour l'air  $\chi_s = \frac{1}{\rho c^2}$ , où  $c$  est la vitesse du son dans l'air  $c \approx 340$  m s<sup>-1</sup>. En déduire alors la valeur de  $\delta P$ , surpression créée dans la cavité en fonction du déplacement du bouchon d'air  $x$ .

3. Appliquer le PFD à la masse d'air du bouchon et la mettre sous la forme d'une équation différentielle d'oscillateur harmonique. Identifier l'équivalent de la constante de raideur  $k$  du ressort formé par la compression de la masse d'air de la cavité.

4. Déterminer alors la période  $\omega_0$  et la fréquence  $f_0$  des oscillations autour de la position d'équilibre.

Une analyse plus poussée montrerait que la longueur  $l_{eff}$  sur laquelle s'effectue les oscillations est plus grande que la longueur  $l$  du col. Plus exactement, les couches d'air situées de part et d'autre du col doivent être entraînées dans le mouvement, et donc la longueur effective  $l_{eff}$ , de la masse d'air mobile est plus grande que la longueur géométrique  $l$  du col. La longueur effective vaut :

$$l_{eff} = l_0 + \frac{8d}{3\pi}$$

où  $d$  est le diamètre du col (voir TP).

### Atome de Thomson

Le modèle de Thomson a été proposé en 1897, à une époque où la théorie atomistique commençait à vraiment faire l'unanimité mais où le modèle exacte de l'atome n'était pas encore déterminé.

Le modèle de Thomson est parfois appelé le modèle "plum pudding". En effet, dans ce modèle les électrons de charge moins (-) nagent dans une gelée de charge + qui forme le noyau. Lorsqu'un électron se déplace loin du centre du nuage de matière positive, il est ramené vers le noyau par une force d'attraction positive. Modélisons cela et voyons ce que l'on peut en déduire.

On considère donc une sphère (le noyau) de centre  $O$  de rayon  $a$ , uniformément chargée en volume et de charge totale  $Q$ . Une charge ponctuelle  $-q$  (l'électron), de signe opposé à  $Q$ , et de masse  $m$ , peut se mouvoir librement dans la grande sphère, le long d'un diamètre. L'électron est soumis à une unique force d'origine d'électrostatique qui tend à attirer vers le point  $O$ .

1. Expliquer l'origine de cette force de rappel qui ramène l'électron au centre de la sphère.
2. Appliquer le théorème de Gauss<sup>20</sup> pour déterminer le champ électrique  $E$  au sein du noyau.
3. En déduire le potentiel électrostatique<sup>21</sup>  $V$  associé au champ électrique  $E$
4. En déduire que l'énergie potentielle  $E_p$ <sup>22</sup> du système s'écrit  $E_p = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQr^2}{a^3}$
5. Identifier la constante de raideur  $k$  dans l'expression de l'énergie potentielle  $E_p$ .
6. En déduire l'expression de la pulsation propre  $\omega_0$  de l'oscillateur.
7. La fréquence propre de ces oscillations peut être déterminée expérimentalement par des méthodes optiques. On trouve une fréquence propre  $\nu_0 = 6 \times 10^{14}$  Hz. Avec les autres données numériques suivantes  $Q = q = |e| = 1.6 \times 10^{-19}$  C,  $m_e = 9 \times 10^{-31}$  kg,
20. Le flux du champ à travers une surface fermée est égale à la charge contenue dans le volume de la surface divisée par la permittivité du vide  $\epsilon_0$
21.  $E = -\text{grad}V$
22.  $E_p = qV$

déterminer la "taille"  $a$  de l'atome d'hydrogène donnée par le modèle de Thomson. Comparer avec les résultats donnés par le modèle actuel de l'atome.

*Oscillations transverses d'un système masse-ressort*

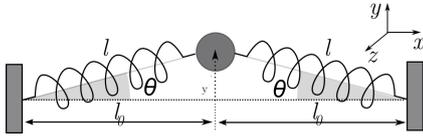


FIGURE 1.10: Système masse ressort pour l'étude des oscillations transverses (cf exercice 1.4)

Cet exercice est assez important car il décrit ce qui sera la brique de base d'une oscillation sur une corde. On peut donc considérer le système décrit sur la figure 1.10 comme un petit bout de corde en train d'osciller. Une masse  $m$  est suspendue entre deux supports rigides grâce à deux ressorts identiques. Ces ressorts n'ont pas de masse, ils ont une constante de raideur  $k$  et une longueur de repos  $l_r$ . A la position d'équilibre de  $m$ , les ressorts ont une longueur  $l_0$ . On néglige les effets de la gravité. La masse  $m$ , a alors 3 degrés de liberté. Nous ne nous intéresserons pas ici aux oscillations dans la direction  $x$  dites longitudinales car nous les avons déjà étudiées en détail tout au long de ce chapitre. Et par simplicité (d'ordre mathématique uniquement), nous nous restreindrons au mouvement selon l'axe  $y$ .

1. Écrire la force de tension exercée par un ressort et la projeter sur l'axe  $y$  et  $x$ .
2. Appliquer le PFD à la masse  $m$ . Montrer que :

$$m\ddot{y} = -2ky \left(1 - \frac{l_r}{l}\right)$$

On gardera pour l'instant l'élongation des ressorts sous la variable  $l$ , bien que cette dernière soit aussi fonction de  $y$ .

3. Afin de linéariser l'équation précédente, on fait un premier type d'hypothèse de type "slinky"<sup>23</sup>, la longueur du ressort étiré  $l$  est bien plus grande que non étiré  $l_r$  et  $l_r \ll l$  et donc  $\frac{l_r}{l} \ll 1$ .  
Donner alors la pulsation d'oscillation de la masse  $m$ .
4. On fait maintenant l'hypothèse des *petites oscillations* :  $y \ll l_0$ .
  - Écrire  $l$  en fonction de  $l_0$  et  $y$  et effectuer un développement limité de  $1/l$ .
  - Reporter dans l'équation différentielle pour avoir une forme linéarisée.
  - En déduire la pulsation des oscillations. Comparer avec la pulsation des oscillations longitudinales.

23. Il s'agit d'un ressort jouet dont la taille dépliée atteint plus de 50 fois la taille du ressort non étiré. En France, les jouets ont été commercialisés sous le nom "ondamania"

## 1.5 CQFR

### *Connaissances*

1. Tout système oscillant avec un degré de liberté peut être décrit par le modèle de l'oscillateur harmonique s'il oscille autour d'une position d'équilibre avec des petites oscillations (approximation à l'ordre 2).
2. La transformation cyclique entre énergie cinétique et énergie potentielle est au cœur du mouvement périodique.
3. Connaitre la forme de l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique ainsi que la solution harmonique associée.

### *Savoir-faire*

1. Savoir établir l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique.
2. Savoir résoudre cette équation en prenant en compte les conditions initiales.
3. Savoir trouver la constante de raideur apparente  $k$  pour des petites oscillations autour d'un point d'équilibre qu'elle que soit la nature physique de l'oscillateur harmonique (classique).





## 2 *L'oscillateur harmonique amorti en régime libre et forcé*

L'OSCILLATEUR HARMONIQUE AMORTI est un modèle plus proche de la réalité quotidienne que l'oscillateur non amorti. Il prend en compte un fait simple : un oscillateur finit par s'arrêter.

Nous allons tout d'abord introduire la cause de la dissipation d'énergie qui conduit à l'arrêt de l'oscillateur : la force de frottements fluides.

Nous regarderons ensuite les conséquences de l'ajout de cette force dans l'équation différentielle et l'évolution temporelle de l'oscillateur. Nous verrons alors que la physique devient plus riche et qu'il faudra distinguer plusieurs régimes d'oscillations libres.

Nous passerons ensuite à une autre facette de l'étude d'un oscillateur : le régime forcé. Au lieu d'étudier le mouvement de l'oscillateur livré à lui-même après lui avoir transmis un peu d'énergie, nous étudierons son évolution lorsqu'une force constante, typiquement sinusoïdale, est appliquée à l'oscillateur. Cela nous conduira entre autres à introduire le phénomène de résonance.

### Sommaire

2.1	Frottement fluide . . . . .	24
2.2	Régime libre . . . . .	24
2.3	Régime Forcé . . . . .	28
2.4	Analogie Élec-méca . . . . .	39
2.5	TD 2 . . . . .	41
2.6	CQFR . . . . .	46

1. Par fluide, on entend liquide ou gaz.

2. C'est à dire quand la viscosité est bien plus importante que les effets convectifs (i.e liés à la vitesse).

3. Vous étudierez expérimentalement le terme en  $v^2$  en TP de mécanique des fluides avec une petite soufflerie. Les expériences sur les frottements fluides à faible nombre de Reynolds concerneront la chute d'une bille dans du glycérol.

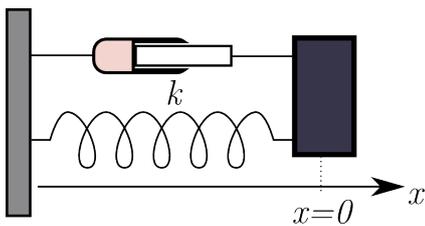


FIGURE 2.1: Schéma du système masse-ressort avec prise en compte de frottements fluides. Le système schématisé au dessus du ressort est un amortisseur. Il s'agit d'un piston pouvant coulisser dans un fluide, typiquement de l'huile. Comme nous allons le voir dans ce chapitre et bien que cela soit un peu contre-intuitif, il est souvent intéressant d'introduire volontairement des frottements visqueux afin de contrôler le comportement des oscillations.

4. On ne peut plus utiliser la constance de l'énergie mécanique car les frottements fluides font maintenant perdre de l'énergie au système.

### 2.1 Les forces de frottement fluide

Les forces de frottement de fluides<sup>1</sup>, comme leur nom l'indique, relève du domaine de la mécanique des fluides. Et, à vrai dire, la description exacte des frottements fluides est complexe et aboutit souvent à des modèles numériques.

Microscopiquement, le système en mouvement se heurte aux molécules constituant le fluide. Ces dernières se déplacent pour laisser place au système mais au passage emportent une partie son énergie. Les frottements peuvent être décrits empiriquement par un modèle relativement simple :

$$\mathbf{F}_{\text{fluide}} = -C_1 v \mathbf{u} - C_2 v^2 \mathbf{u}$$

où  $\mathbf{u}$  est le vecteur directeur de la vitesse. On note tout de suite trois choses :

- La présence du signe moins : la force de frottements s'oppose au mouvement.
- La dépendance en vitesse  $v$ . A vitesse nulle, la force de frottement fluide est nulle (ce qui n'est pas le cas pour les frottements solides cf annexe A).
- Le travail des forces de frottements n'est pas nul et il est négatif, les forces de frottement prélèvent de l'énergie au système ce qui conduit à son arrêt.

A très faible vitesse, ou plus exactement à nombre de Reynolds très faible<sup>2</sup> (cf cours de mécanique des fluides), le terme en  $v^2$  devient négligeable et on ne conserve que le terme en  $v$ , ce qui arrange nos affaires car la force de frottement fluide devient alors linéaire. A très fort nombre de Reynolds, c'est le terme en  $v^2$  qui est prédominant<sup>3</sup>. Nous travaillerons ici toujours à nombre de Reynolds très faible et on pourra donc décrire empiriquement les forces de frottements par :

$$\mathbf{F}_{\text{fluide}} = -\alpha v$$

### 2.2 L'oscillateur harmonique amorti en régime libre

On reprend le système décrit sur la figure 1.1 auquel on ajoute des frottements fluides (voir fig 2.1). Cela correspond par exemple tout simplement à prendre en compte les frottements de l'air.

#### 2.2.1 L'équation différentielle

L'application<sup>4</sup> du PFD à la masse  $m$  projeté sur l'axe  $x$  donne :

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x}$$

et obtient l'équation différentielle linéaire suivante :

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{2.1}$$

où  $\tau$  est homogène à un temps et vaut  $\tau = \frac{m}{\alpha}$ , comme précédemment  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ .

2.2.2 Résolution mathématique de l'équation différentielle

La résolution de l'équation différentielle 2.1 va être un peu plus longue que dans le cas non amorti.

On cherche à nouveau les solutions sous la forme  $x = e^{st}$ ,  $s$  pouvant être complexe. On injecte cette expression dans 2.1 et après simplification par  $e^{st}$  :

$$s^2 + \frac{1}{\tau}s + \omega_0^2 = 0$$

$s$  est donc solution de cette équation du second degré<sup>5</sup>. Le signe du discriminant  $\Delta$  va déterminer deux types d'évolution pour l'oscillateur : apériodique (c'est à dire sans oscillation) ou périodique amortie (aussi appelée pseudo-périodique). Le discriminant vaut :

$$\Delta = \frac{1}{\tau^2} - 4\omega_0^2 = \omega_0^2 \left( \frac{1}{\tau^2\omega_0^2} - 4 \right) = \omega_0^2 \left( \frac{1}{Q^2} - 4 \right)$$

où nous avons introduit le *facteur de qualité*  $Q$  :

$$Q = \omega_0\tau \tag{2.2}$$

$Q$  est sans dimension, et son interprétation physique sera explicitée un peu plus tard.

Si  $Q > 1/2$  soit  $\Delta < 0$  le régime est *pseudo-périodique*. En effet,  $s$  est complexe et le terme en exponentielle complexe va amener des termes oscillants en cosinus et sinus. Plus exactement :

$$s_{1/2} = \frac{-1/\tau \pm i\sqrt{-\omega_0^2 \left( \frac{1}{Q^2} - 4 \right)}}{2} = -\frac{1}{2\tau} \pm i\Omega$$

avec :

$$\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \tag{2.3}$$

La solution générale de l'équation différentielle est une des combinaisons linéaires des deux solutions exponentielles<sup>6</sup> :

$$z(t) = C_1e^{s_1t} + C_2e^{s_2t} = e^{-\frac{t}{2\tau}} [C_1e^{i\Omega t} + C_2e^{-i\Omega t}]$$

et comme les coefficients de l'équation différentielle sont réels, les solutions le sont aussi :

$$x(t) = \text{Re} [z(t)] = [a \cos(\Omega t) + b \sin(\Omega t)] e^{-\frac{t}{2\tau}} \tag{2.4}$$

que l'on peut aussi écrire :

Oscillation pseudo-périodique

$$x(t) = [X_0 \cos(\Omega t + \Phi)] e^{-\frac{t}{2\tau}} \tag{2.5}$$

5. Soit l'équation du second degré  $ax^2 + bx + c = 0$ . Soit le discriminant  $\Delta = b^2 - 4ac$  : Si

$$\Delta > 0 \text{ alors } x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Delta = 0 \text{ alors } x = \frac{-b}{2a}$$

$$\Delta < 0 \text{ alors } x_{\pm} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

6. Les exponentielles que nous venons de trouver sont les deux vecteurs propres de l'espace vectoriel des solutions de cette équation différentielle d'ordre 2.

7. Elle est légèrement plus faible, ce que l'on peut comprendre intuitivement en pensant que les frottements ralentissent le système.

8. On trouve dans la littérature plusieurs façons d'écrire l'équation différentielle 2.1, on définit parfois  $\tau = 2m/\alpha$  pour se débarrasser du 2 dans l'exponentielle. Cela modifie quelque peu les expressions, mais au final cela n'a pas beaucoup d'importance car l'interprétation des termes  $\tau$ ,  $\Omega$ ,  $Q$  reste la même

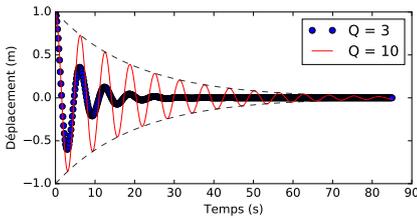


FIGURE 2.2: Evolution temporelle de l'oscillateur harmonique amorti dans le cas pseudo-périodique

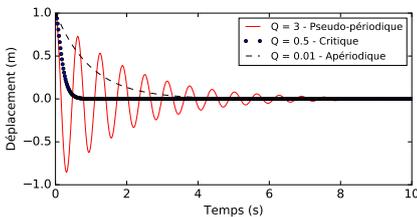


FIGURE 2.3: Évolution temporelle de l'oscillateur harmonique amorti en régime libre en fonction du facteur de qualité

où  $X_0$  l'amplitude maximale et la phase  $\Phi$  sont déterminées par les conditions initiales.

On retrouve l'expression de l'oscillateur harmonique à deux exceptions près :

- La pulsation de la pseudo-oscillation est  $\Omega$  au lieu de  $\omega_0$  (pulsation propre de l'oscillateur sans frottement).  $\Omega$  est très proche mais légèrement différente<sup>7</sup> de  $\omega_0$ . Toutefois cette correction est rapidement négligeable pour des facteurs de qualité  $Q$  importants. Typiquement, pour  $Q = 5$ , l'écart n'est que de 0.5%, l'approximation est déjà justifiée.
- Le terme oscillant est multiplié par une exponentielle décroissante. C'est ce terme qui est responsable de l'amortissement des oscillations. Au bout du temps  $\tau$ , l'amplitude des oscillations a été divisée par  $e^{0.5} = 1.6$ ,  $\tau$  est donc le *temps caractéristique d'amortissement* du système<sup>8</sup>.

L'évolution temporelle du système lâché sans vitesse de la position  $x_0$  est montrée sur la figure 2.3. Nous pouvons alors revenir sur la définition du facteur de qualité  $Q = \omega_0\tau \simeq \tau/T$  où  $T$  est la période d'oscillation du système.  $Q$  est le nombre d'oscillation (où chaque oscillation dure  $T$ ) du système durant le temps d'amortissement  $\tau$ .

**Facteur de qualité**  
  
 $Q$  est donc le *nombre d'oscillations visibles*.

Le facteur de qualité d'un pendule avec uniquement des frottements fluides peut atteindre environ 100 (soit donc environ 100 oscillations avant que l'amortissement rende les dernières oscillations difficilement observables). La Terre lors d'un tremblement de terre atteint  $Q \approx 1000$ . Un cristal de quartz, qui sert de référence temporelle dans énormément de circuit électronique, atteint  $Q \approx 10^5$ . Un atome excité, par exemple dans une lampe à décharge, atteint  $Q \approx 10^7$ .

Si  $Q < 1/2$  soit  $\Delta > 0$  le régime est *apériodique* : le système n'oscille même pas tellement les frottements sont forts. Mathématiquement :

$$s_{1/2} = \frac{-1/\tau \pm \sqrt{\omega_0^2(\frac{1}{Q^2} - 4)}}{2}$$

et la solution est à nouveau une combinaison linéaire de  $s_1$  et  $s_2$  :

$$x(t) = ae^{s_1 t} + be^{s_2 t}$$

$s_1$  et  $s_2$  sont des termes négatifs. L'amplitude décroît sans oscillation, l'oscillateur n'a pas même le temps de faire une seule période d'où le nom d'apériodique. Les constantes  $a$  et  $b$  sont déterminées comme auparavant par deux conditions initiales. Les deux temps qui interviennent ici sont :

$$\tau_1 = |s_1|^{-1} \quad \text{et} \quad \tau_2 = |s_2|^{-1}$$

L'évolution est gouvernée par l'exponentielle décroissant le plus lentement, c'est à dire par le plus grand de ces deux temps. Puisque  $Q \ll 1$ , un développement limité de  $s_1$  et  $s_2$  donne :

$$s_{1/2} = -\frac{1}{2\tau} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4Q^2}\right) \simeq -\frac{1}{2\tau} \left[1 \pm (1 - 2Q^2)\right]$$

et donc :

$$s_1 \approx -\frac{1}{\tau} \quad \text{et} \quad s_2 \approx -\frac{Q^2}{\tau} \quad \Rightarrow \quad |s_1| \gg |s_2|$$

et finalement :

Durée caractéristique de l'amortissement aperiodique

$$\tau' = \frac{\tau}{Q^2}$$

Alors qu'en régime pseudo-périodique plus les frottements sont importants et plus le mouvement est amorti rapidement, en régime aperiodique c'est l'inverse. Les frottements sont tellement importants que le système ne peut prendre suffisamment de vitesse pour osciller<sup>9</sup>.

Si  $Q = 1/2$  soit  $\Delta = 0$  correspond au régime *apériodique critique*. Mathématiquement la solution s'écrit  $x(t) = (a + bt)e^{st}$  avec  $s = -1/2\tau$ .

Cependant, cela n'a pas particulièrement de sens physique car aucun système n'a exactement  $Q = 1/2$ . Il faut plutôt voir cela comme la frontière théorique entre le régime aperiodique et le pseudo-périodique.

D'un point de vue ingénieur, il s'agit aussi parfois d'un objectif à atteindre. En effet, le *régime critique* est celui pour lequel le système évolue *le plus rapidement vers l'équilibre*. Le temps mis pour revenir au voisinage de la position de l'équilibre est alors de l'ordre de la période propre  $T_0$ . On peut par exemple penser aux amortisseurs d'une voiture. Lorsque l'on passe sur un ralentisseur on préfère que la voiture ne passe pas en régime aperiodique qui met beaucoup de temps pour revenir à l'équilibre et encore moins en régime pseudo-périodique<sup>10</sup> qui est désagréable pour les passagers<sup>11</sup>. On règle donc l'amortissement pour avoir un facteur de qualité de l'ordre de  $1/2$ .

### 2.2.3 Aspect énergétiques

Comparé au 1.1.3, il faut maintenant prendre en compte le travail des forces de frottements<sup>12</sup>. Il y a dissipation de l'énergie mécanique sous forme de chaleur par suite des frottements. Ce que l'on peut écrire<sup>13</sup> :

$$\frac{dEm}{dt} = \alpha v^2 < 0$$

Intéressons-nous au cas du régime pseudo-périodique. En partant de l'expression de la position au cours du temps 2.5, on obtient la

9. Ainsi l'énergie mécanique reste principalement sous forme potentielle. Elle est dissipée par les frottements avant même d'être convertie en énergie cinétique.

10. On peut alors estimer le facteur de qualité de la voiture en comptant le nombre d'oscillation! Le facteur de qualité dépend de la masse de la voiture et donc de son chargement.

11. On peut aussi penser aux balances mal réglées qui auraient un facteur de qualité  $Q$  trop élevé : le résultat oscillerait avant de se stabiliser sur la valeur.

12. La puissance de la force de frottement fluide vaut  $P_{fluide} = -\alpha v \cdot v = -\alpha v^2$  et le théorème de l'énergie mécanique indique que l'évolution temporelle de l'énergie mécanique est gouvernée par la puissance des forces non conservatives  $\frac{dEm}{dt} = -\alpha v^2$

13. On peut obtenir cette équation en partant de l'équation différentielle 2.1 et en la multipliant par  $v = \dot{x}$ , il vient  $\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \right) = -\alpha v^2$

14. La vitesse d'un mouvement pseudo-périodique s'écrit :

$$v_{\text{pseudoP}}(t) = -X_0\Omega \sin(\Omega t + \Phi)e^{-\frac{t}{2\tau}} - \frac{1}{2\tau}X_0 \cos(\Omega t + \Phi)e^{-\frac{t}{2\tau}}$$

L'importance de ces deux termes revient à examiner le rapport  $\Omega/(1/\tau) = Q$ . En d'autres termes, plus le facteur de qualité  $Q$  est important, plus le premier terme l'emporte sur le second. Par la suite, se plaçant dans le cas  $Q > 10$ , nous négligeons le deuxième terme.

valeur de l'énergie potentielle et via celle de la vitesse, l'expression de l'énergie cinétique <sup>14</sup> :

$$E_p = \frac{1}{2}k [X_0 \cos(\Omega t + \Phi)]^2 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad E_c = \frac{1}{2}m [X_0\Omega \sin(\Omega t + \Phi)]^2 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Leur évolution est montrée sur la figure 2.4. Nous voyons que l'énergie oscille toujours entre énergie potentielle et cinétique, mais l'énergie totale diminue exponentiellement au cours du temps.

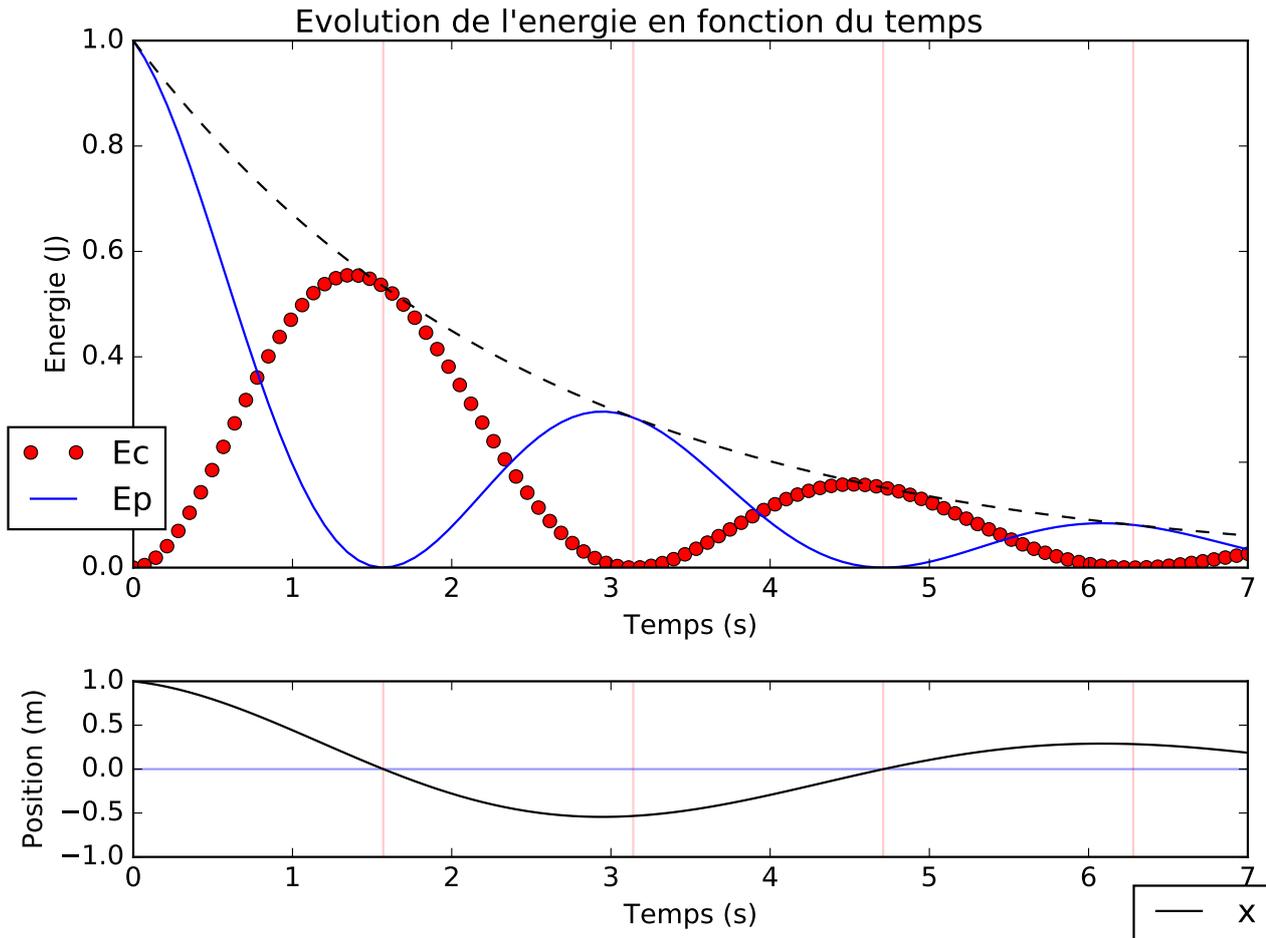


FIGURE 2.4: Évolution temporelle de l'énergie au sein d'un oscillateur harmonique amorti en régime pseudo-périodique.  $\omega_0 = 1 \text{ rad s}^{-1}$ ,  $k = 1 \text{ N s}^{-1}$ ,  $m = 1 \text{ kg}$ ,  $\tau = 2,5 \text{ s}$ ,  $Q = 2,5$

15. Souvent appelée "delta" par les physiciens en référence à la distribution de Dirac notée  $\delta$  qui prend une "valeur" infinie en 0, et la valeur zéro partout ailleurs, voir 6.3.4 p102

16. Le cas où on apporte de l'énergie de façon discontinue est évoqué dans l'annexe A lorsque nous aborderons brièvement le cas des oscillateurs paramétriques.

### 2.3 L'oscillateur harmonique amorti en régime forcé

Jusque là nous avons étudié le régime libre des oscillateurs, c'est à dire que nous avons apporté une impulsion d'énergie <sup>15</sup> à l'instant  $t = 0$  et nous avons ensuite laissé l'oscillateur la transformer périodiquement en énergie cinétique et potentielle. Dans le cas amorti, l'énergie initiale est aussi dissipée sous forme d'énergie thermique par les frottements.

Nous allons maintenant apporter de façon continue <sup>16</sup> de l'énergie à l'oscillateur et nous allons étudier sous quelles conditions ce dernier

peut utiliser cette énergie. Plus précisément, nous allons mettre l'oscillateur en mouvement avec une force sinusoïdale  $F = F_0 \cos(\omega t + \Phi)x$ . Cette approche n'est absolument pas limitante car nous verrons dans le chapitre 6 que tout mouvement appliqué à l'oscillateur (tant que ce dernier a un comportement linéaire) peut être décomposé en une somme de mouvements harmoniques.

### 2.3.1 Équation différentielle et résolution mathématique

Par rapport à l'équation en régime libre 2.1, il faut maintenant ajouter la force harmonique à la pulsation  $\omega$  essayant de mettre l'oscillateur en mouvement<sup>17</sup> :

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad (2.6)$$

D'un point de vue mathématique, l'équation différentielle a maintenant un second membre. La solution  $x(t)$  d'une telle équation s'écrit<sup>18</sup> :

$$\underbrace{x(t)}_{\text{sol. générale de l'éq. avec 2nd membre}} = \underbrace{\tilde{x}}_{\text{sol. particulière}} + \underbrace{\bar{x}}_{\text{sol. générale de l'éq. homogène}}$$

Nous avons déjà vu au 2.2.2 le cas de l'équation homogène  $\bar{x}$  (c'est à dire avec le second membre égal à 0). Il s'agit alors de trouver une solution particulière  $\tilde{x}$  de 2.6.

Nous allons alors utiliser le fait que l'équation différentielle est *linéaire* (voir encart 1). Si un système linéaire est excité à la pulsation  $\omega$  alors *nécessairement* la réponse est elle aussi à la pulsation  $\omega$ . Dit autrement, comme on excite sinusoïdalement le système à la pulsation  $\omega$ , alors la réponse est sinusoïdale à la pulsation  $\omega$  et  $\tilde{x}(t)$  est de la forme<sup>19</sup>  $\tilde{x}(t) = X_0 \cos(\omega t + \Phi)$ .

Nous allons voir par la suite que l'amplitude  $X_0$  et la phase  $\Phi$  vont dépendre de la pulsation  $\omega$  (phénomène de résonance). Par contre, au risque de se répéter, on sait d'ores et déjà que la pulsation de réponse du système sera la même que celle d'excitation c'est à dire  $\omega$ .

Il existe alors plusieurs méthodes pour trouver une solution particulière de l'équation 2.6 :

*Méthode algébrique (à proscrire)* On injecte  $\tilde{x}(t) = X_0 \cos(\omega t + \Phi)$  dans l'équation différentielle, on effectue les dérivées et on identifie les facteurs en  $\cos(\omega t)$  et  $\sin(\omega t)$ . C'est faisable mais TRÈS long et fastidieux.

*Méthode de la variable complexe* Efficace et élégante, c'est celle que nous allons utiliser (voir encart 2).

*Méthode de Fresnel* Elle consiste à traduire géométriquement dans le plan complexe la méthode précédente. (voir annexe A).

17. Attention de ne pas confondre  $\omega_0$  qui est la pulsation propre de l'oscillateur et qui est donc propre au système étudié et la fréquence  $\omega$  qui est une fréquence extérieure que l'on impose au système, il s'agit d'un paramètre que l'on va faire varier.

18. Voir cours de maths sur les équations différentielles linéaires à coefficient constant.

19. NB : Noter bien la pulsation de ce mouvement harmonique. Il s'agit de  $\omega$  la pulsation imposée par la force excitatrice et non la pulsation propre  $\omega_0$  des oscillations libres (non amorties)

## Encart 1 : Système linéaire

Un système est dit linéaire si sa réponse  $\mathcal{L}$  à une somme de stimuli ( $u_1$  et  $u_2$ ) est égale à la somme des réponses de chaque stimulus (principe de superposition). Mathématiquement :

$$\mathcal{L}(u_1 + u_2) = \mathcal{L}(u_1) + \mathcal{L}(u_2)$$

- Un système est dit linéaire s'il peut être décrit par des équations linéaires (éventuellement différentielles).
- Un système linéaire ne peut pas créer de nouvelles fréquences. Dit autrement, si on excite un système à la pulsation  $\omega$ , la réponse du système sera *nécessairement* à la pulsation  $\omega$ .

Comme exemple d'équation différentielle linéaire importante nous pouvons citer :

- Les équations de Maxwell
- L'équation de Schrodinger
- L'équation d'onde de d'Alembert (cf chap 4)

Comme exemple d'équation non linéaire nous pouvons citer :

- L'équation de Navier-Stokes
- Tout oscillateur dont les oscillations sont relativement grandes
- Quasiment toutes les équations de la physique lorsque l'on s'intéresse à des phénomènes "extrêmes".

## Encart 2 : Méthode de la variable complexe

La méthode de la variable complexe consiste à associer à la fonction sinusoïdale  $g(t) = g_m \cos(\omega t + \Phi)$ , l'amplitude complexe  $\underline{G} = g_m e^{i\Phi}$ . On a alors :

$$g_m = |\underline{G}| \quad \text{et} \quad \Phi = \arg \underline{G}$$

$\underline{G}$  est donc un nombre complexe qui contient à la fois l'amplitude et la phase du mouvement sinusoïdale. Cependant, il n'a pas de variation temporelle et c'est pourquoi afin de totalement représenter la fonction sinusoïdale  $g(t)$ , on lui adjoint un terme oscillant en  $\cos \omega t$  qui devient  $e^{i\omega t}$  en notation complexe. Au total, la représentation complexe  $\underline{g}$  de la fonction sinusoïdale  $g(t)$  s'écrit :

$$\underline{g}(t) = \underline{G} e^{i\omega t}$$

Le retour à la notation réelle s'effectue en prenant la partie réelle de la grandeur complexe  $\underline{g}(t)$  :

$$g(t) = \Re [\underline{g}(t)] = \Re [\underline{G} e^{i\omega t}] = g_m \cos(\omega t + \Phi)$$

La dérivée temporelle de  $\underline{g}(t)$  est extrêmement simple :

$$\dot{\underline{g}}(t) = i\omega \underline{g}(t)$$

La dérivée seconde aussi :

$$\ddot{\underline{g}}(t) = -\omega^2 \underline{g}(t)$$

Il y a équivalence entre la dérivée temporelle et la multiplication par  $i\omega$ .

La notation complexe est donc un intermédiaire de calcul. Il faut le voir comme un outil qui permet d'obtenir rapidement la solution particulière de l'équation différentielle.

En prenant un peu plus de recul, on peut voir qu'un nombre complexe est formé à partir de deux nombres réels. En d'autres termes, avec un seul nombre complexe on peut effectuer simultanément des calculs sur deux grandeurs réels. En ce qui nous concerne, ces deux grandeurs sont l'amplitude  $g_m$  et la phase  $\Phi$ . Lorsque l'on manipule  $\underline{G}$ , on manipule simultanément la phase et l'amplitude. On économise donc une équation. De plus les calculs portant sur  $\underline{G}$  sont beaucoup plus faciles à effectuer que ceux portant sur  $g_m$  et  $\Phi$  si nous restions dans l'espace réel.

On injecte la forme  $\underline{x}(t) = x_m e^{i\Phi} e^{i\omega t} = \underline{X} e^{i\omega t}$  dans l'équation<sup>20</sup> 2.6,

20. Le terme  $F_0/m \cos \omega t$  du second membre devient après passage en complexe  $F_0/m e^{i\omega t}$  car on a bien  $\Re [F_0/m e^{i\omega t}] = F_0/m \cos \omega t$

et on obtient après simplification par  $e^{i\omega t}$  :

$$-\omega^2 \underline{X} + i \frac{1}{\tau} \omega \underline{X} + \omega_0^2 \underline{X} = \frac{F_0}{m}$$

et donc en factorisant :

$$\underline{X} = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i \frac{\omega}{\tau}} \tag{2.7}$$

La solution particulière cherchée s'écrit :

$$\tilde{x}(t) = X_0 \cos(\omega t + \Phi_x)$$

avec<sup>21</sup> :

$$X_0(\omega) = |\underline{X}| = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}}} \tag{2.8}$$

et<sup>22 23</sup> :

$$\Phi_x(\omega) = \arg \underline{X} = 0 - \arg \left[ \omega_0^2 - \omega^2 + i \frac{\omega}{\tau} \right] \Leftrightarrow \tan \Phi_x = \frac{-\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{2.9}$$

21. On utilise le fait que  $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

22. On utilise le fait que  $\arg \left( \frac{z_1}{z_2} \right) = \arg z_1 - \arg z_2$  et que  $\arg(F_0/m) = 0$  car  $F_0/m$  est un nombre réel.

23. Il faut faire attention au signe lorsque l'on utilise la fonction arctan pour obtenir la phase si le dénominateur  $(\omega_0^2 - \omega^2)$  est positif alors  $\phi = \arctan\left(\frac{-\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$  et si le dénominateur est négatif  $\phi = \pi - \arctan\left(\frac{-\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$

**Encart 3 : Quelques rappels de mathématiques avec les nombres complexes**

Un nombre complexe  $z$  peut se mettre sous deux formes :

- Celle mettant en avant la partie réelle  $a$  et la partie imaginaire  $b$  :

$$z = a + ib$$

- Celle mettant en avant sa représentation géométrique dans le plan complexe avec sa norme  $\rho$  et sa phase  $\Phi$  :

$$z = \rho e^{i\Phi}$$

On passe de l'une à l'autre en développant l'exponentielle complexe dans la représentation en "norme et phase" et en identifiant partie réelle et partie imaginaire :

$$z = a + ib = \rho e^{i\Phi} = \rho \cos \Phi + i \rho \sin \Phi$$

d'où

$$a = \rho \cos \Phi \quad \text{et} \quad b = \rho \sin \Phi$$

et aussi :

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{et} \quad \Phi = \arctan \frac{b}{a}$$

Au total, l'expression finale de l'évolution de la position de l'oscillateur au cours du temps  $x(t)$  est assez longue et dépend du facteur de qualité  $Q$ . Plaçons nous par exemple dans le cas  $Q > 1/2$ , nous avons alors :

$$x(t) = [X_0 \cos(\Omega t + \Phi)] e^{-\frac{t}{2\tau}} + [|\underline{X}| \cos(\omega t + \arg(\underline{X}))]$$

avec  $X_0$  et  $\Phi$  déterminés par les conditions initiales et  $\underline{X}$  donné par l'équation 2.7.

## 2.3.2 Régime transitoire et régime permanent

## Encart 4 : Les battements

Supposons que l'on ait la somme de deux mouvements harmoniques avec une amplitude semblable mais une légère différence de pulsation  $\Delta\omega$  entre les deux

$$x_1 = A \cos \omega_1 t \quad x_2 = A \cos \omega_2 t = A \cos(\omega_1 + \Delta\omega)t$$

avec

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$$

La somme des deux signaux donne, avec un peu de trigonométrie<sup>a</sup> :

$$x = x_1 + x_2 = 2A \underbrace{\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)}_{\text{gde fr. : Rapide}} \underbrace{\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)}_{\text{pt fr. : Lent}}$$

Si les deux pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont proches, le terme en  $\Delta\omega$  est bien plus petit que  $(\omega_1 + \omega_2)/2 \approx \omega_1$ . Autrement dit le terme en  $\Delta\omega$  aura une période bien plus grande et va jouer le rôle d'enveloppe pour le terme oscillant à la pulsation  $\omega_1$  (voir figure 2.5).

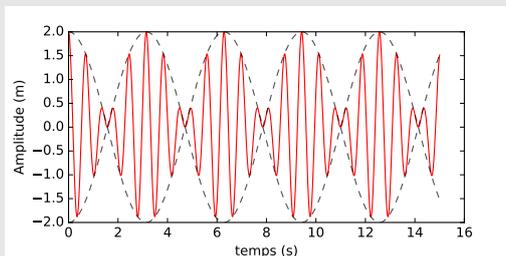


FIGURE 2.5: Battements obtenus par l'addition de deux signaux harmoniques le premier à la pulsation  $\omega_1 = 10 \text{ rad s}^{-1}$  et le second à  $\omega_2 = 8 \text{ rad s}^{-1}$ . En pointillé, l'enveloppe des battements à la pulsation  $\Delta\omega/2 = 1 \text{ rad s}^{-1}$

Le terme battement est issu de l'acoustique, en effet si les deux signaux harmoniques sont sonores, l'oreille capte la lente variation d'amplitude de l'enveloppe (qui peut être de l'ordre de quelques hertz par exemple) ce que le cerveau interprète comme une fréquence alors qu'évidemment, d'une part, cette fréquence n'existe pas et d'autre part, que l'oreille ne peut même pas capter cette basse fréquence car elle est en dessous de sa bande passante (20 Hz - 20 kHz).

<sup>a</sup>

$$\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

La solution de l'équation homogène que nous avons étudiée au 2.2, que ce soit en régime aperiodique ou pseudo-periodique tend progressivement vers zéro à cause des frottements fluides qui prélèvent

24. Même si on met le système en mouvement harmonique avec une force  $F = F_0 \cos(\omega t + \Phi)x$ , au moment  $t = 0$  le système passe de aucune force appliquée à une force sinusoïdale. Cette discontinuité est équivalente à une impulsion, un "delta" qui aurait été donné au système à  $t = 0$ .

peu à peu l'énergie qui a été donnée au système à l'instant où on l'a mis en mouvement<sup>24</sup>. La solution particulière de l'équation 2.6 est harmonique et ne tend pas, elle, vers zéro. On se retrouve donc avec deux types de comportement pour le système :

*Le régime transitoire* où le terme décroissant du régime aperiodique ou pseudo periodique n'est pas encore nul. Le mouvement est donc la somme

- d'un premier terme décroissant exponentiellement qui, dans le cas du régime pseudo-periodique oscille à la pulsation  $\Omega$  (cf eq. 2.3) très proche de  $\omega_0$
- d'un terme d'oscillation forcée à la pulsation  $\omega$  imposée par l'opérateur.

Un tel mouvement est représenté sur la figure 2.6. Un cas particulier assez spectaculaire est lorsque  $\omega$  se rapproche de  $\omega_0$  (i.e de la résonance, voir plus bas). Les deux fréquences étant très proches, on peut voir des battements (cf encart 3). Ces battements durent le temps du régime transitoire soit :

- Environ  $Q$  oscillations, soit un temps de l'ordre de quelques  $\tau$  pour un régime *pseudo-periodique*
- Un temps  $\tau'$  de l'ordre de  $\tau' \approx \frac{\tau}{Q^2}$  pour le régime *aperiodique*.

*Le régime permanent* où le terme décroissant est quasi nul. On a alors uniquement une oscillation à la pulsation  $\omega$ . L'amplitude de ces oscillations et leur déphasage par rapport à la force  $F$  imposée dépendent du système et plus précisément de sa pulsation propre  $\omega_0$  (si il est en résonance en particulier).

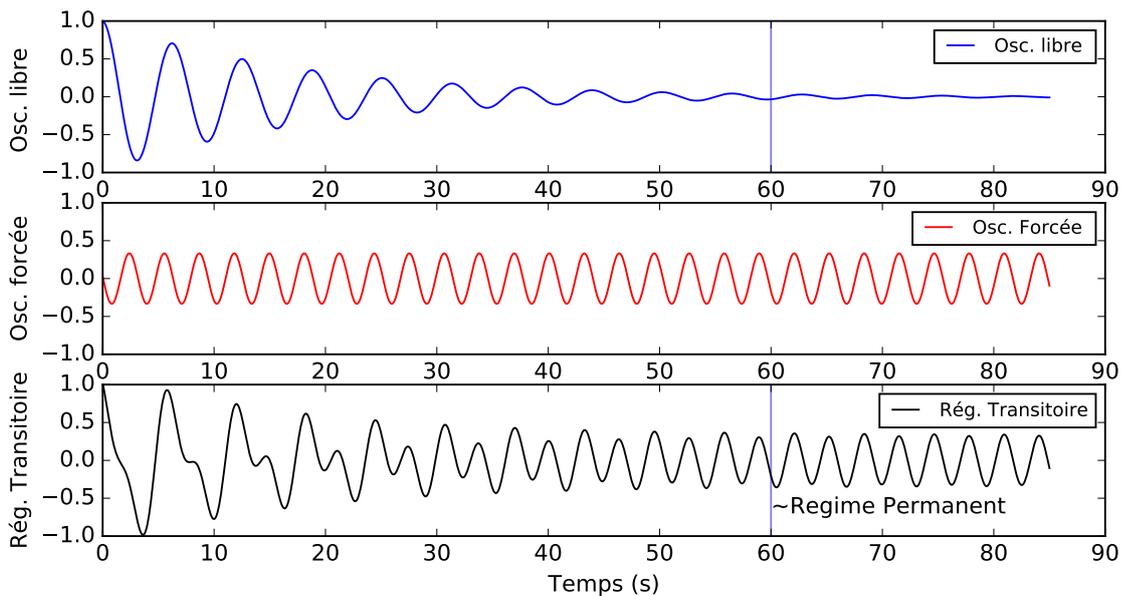


FIGURE 2.6: Régime transitoire de l'oscillateur harmonique amorti avec  $\omega_0 = 1 \text{ rad s}^{-1}$  et  $Q = 9$ . Le régime permanent est atteint à la fin du régime libre vers 60s environ.

### 2.3.3 Le phénomène de résonance

On s'intéresse maintenant au régime permanent et plus particulièrement à l'amplitude et au déphasage des oscillations forcées en fonction de la pulsation  $\omega$  que l'on impose au système.

*Résonance en amplitude* L'évolution de l'amplitude<sup>25</sup>  $X_0$  (cf eq 2.8) en fonction de la pulsation  $\omega$  imposée au système est tracée sur la figure 2.7 pour différentes valeurs du facteur de qualité  $Q = \omega_0\tau$  du système. On voit que pour des pulsations  $\omega$  proches de  $\omega_0$  l'amplitude augmente considérablement : on parle alors de résonance. Mathématiquement, l'expression de  $X_0$  passe par un maximum lorsque son dénominateur est maximum. On peut déterminer la fréquence  $\omega_r$  qui conduit à ce minimum du dénominateur en le dérivant par rapport à  $\omega$  et en trouvant la valeur de  $\omega_r$  annulant cette dérivée. On obtient<sup>26</sup> :

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \quad \text{si } Q > \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (2.10)$$

On voit que la résonance en élongation (c'est à dire pour  $x(t)$ ) n'a lieu que pour les bons facteurs de qualité<sup>27</sup>. D'autre part, pour des facteurs de qualité  $Q \gtrsim 5$ , on peut considérer que la fréquence de résonance est quasiment égale à la fréquence propre<sup>28</sup> du système :  $\omega_r \approx \omega_0$ .

Si nous revenons à l'oscillateur harmonique non amorti du chapitre 1, ce qui revient à faire mathématiquement  $\alpha \rightarrow 0$  ou  $\tau \rightarrow \infty$ , le dénominateur de l'amplitude  $X_0$  tend vers l'infini. Ce comportement n'est évidemment pas physique et nous rappelle qu'un oscillateur harmonique est un modèle car d'une part tout oscillateur<sup>29</sup> a un amortissement, aussi faible soit-il, et surtout d'autre part si l'amplitude augmente démesurément des effets non linéaires vont apparaître et modifier l'équation différentielle; le comportement le plus non linéaire étant la rupture du ressort!

D'un point de vue plus général, les phénomènes de résonance sont utilisés un peu partout, que ce soit dans notre oreille ou pour un sismographe, pour extraire le maximum d'énergie d'une sollicitation extérieure et ainsi obtenir un signal mesurable.

*Bande passante et temps de vie* L'acuité de la résonance peut être caractérisée par la plage de fréquence sur laquelle l'amplitude est importante. Plus précisément et de façon un peu arbitraire, on définit le domaine de pulsation  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$  où l'amplitude  $X_0 > X_{0max}/\sqrt{2}$ . Les pulsations frontières  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont appelées *pulsations de coupures*. A vrai dire, la valeur absolue n'a aucune importance en soit, c'est la *valeur relative* qui nous intéresse. En effet, une bande passante de 10 Hz pour une fréquence de résonance de 10kHz est bien plus précise qu'une bande passante de 1Hz pour une fréquence de

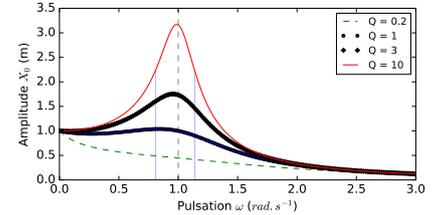


FIGURE 2.7: Résonance d'un oscillateur amorti pour différente valeur du facteur de qualité  $Q$  (avec  $\omega_0 = 1 \text{ rad s}^{-1}$ ) est indiquée par la ligne verticale en tiret. Évolution de l'amplitude  $X_0(\omega)$

25. L'évolution de la vitesse est vue dans l'exercice 2.5.3

26. La dérivée de l'argument sous la racine du dénominateur par rapport à  $\omega$  vaut :  $2(\omega_0^2 - \omega^2)(-2\omega) + \frac{2\omega}{\tau^2}$ . Elle s'annule pour la valeur  $\omega = \omega_r$  tel que

$$2(\omega_0^2 - \omega_r^2) = \frac{1}{\tau^2}$$

et

$$\omega_r^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{2\tau^2} = \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)$$

27. Par contre, quelque soit le facteur de qualité, il y a toujours une résonance en vitesse (cf exercice 2.5.3).

28. Il est donc facile d'évaluer rapidement la fréquence de résonance d'un oscillateur. Il suffit donner une pichenette à l'oscillateur (ou, dit plus proprement, le mettre en régime d'oscillation libre) et évaluer sa fréquence propre. A très peu de chose près, la fréquence de résonance sera la pulsation propre.

29. Sauf peut-être certain système quantique mettant en jeu de la supraconductivité ou de la superfluidité

résonance de 5Hz. On montre (cf exercice 2.5.3) que :

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} \approx \frac{1}{Q} \tag{2.11}$$

Ainsi, le facteur de qualité  $Q$  représente :

*dans le domaine temporel* : le nombre d'oscillation visible

*dans le domaine fréquentiel* : l'acuité de la résonance.

Cela est assez logique puisque plus nous pouvons mesurer de périodes dans le domaine temporel ( $Q$  grand donc) et plus nous aurons une mesure précise de la fréquence de ces oscillations. Réciproquement, si la résonance est peu marquée ( $Q$  petit donc), nous avons une grande incertitude sur la mesure de la fréquence de résonance et donc forcément nous devons avoir peu d'oscillation dans le domaine temporel, sinon nous pourrions trouver une valeur plus précise de la fréquence.

Dit autrement, si un signal a une fréquence précise, alors temporellement il dure longtemps ; le cas extrême étant une oscillation harmonique sinusoïdale, qui, en théorie, devrait durer éternellement : du début à la fin de l'univers. Une bande passante infiniment étroite implique donc une durée de vie infinie (cf chapitre 10). A contrario, si un signal est limité dans le temps, une impulsion électrique par exemple, alors forcément son spectre est polychromatique. Une durée de vie finie implique une bande passante non nulle.

Nous reprendrons ces idées au chapitre 6 et 10, et nous verrons que leur application conduit directement, entre autres, au principe d'incertitude d'Heisenberg en mécanique quantique.

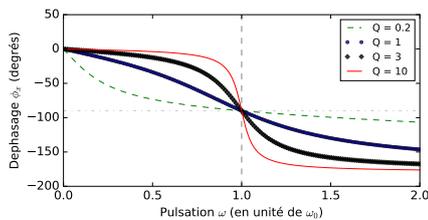


FIGURE 2.8: Résonance d'un oscillateur amorti pour différente valeur du facteur de qualité  $Q$  (avec  $\omega_0 = 1 \text{ rad s}^{-1}$ ) est indiquée par la ligne verticale en tiret. Évolution de la phase  $\Phi_x(\omega)$

**Déphasage** Le déphasage  $\Phi_x$  entre la force extérieure et le mouvement effectif de l'oscillateur est lui aussi fonction de la fréquence  $\omega$  imposée par l'opérateur. Son évolution, qui est donnée par l'équation 2.9, est représentée sur la figure 2.8. Alors que la masse  $m$  suit le mouvement qu'on lui impose à basse fréquence ( $\omega \ll \omega_0$ ), elle se déphase peu à peu en prenant du retard.

- Le déphasage est de  $\pi/2$  à la résonance<sup>30</sup> ( $\omega \approx \omega_0$ )
- Le déphasage est de  $\pi$  à grande fréquence<sup>31</sup> ( $\omega \gg \omega_0$ )

**Retour sur l'équation différentielle** Plaçons nous à la résonance (avec un grand facteur qualité), donc  $\omega = \omega_r = \omega_0$ . Revenons sur l'équation 2.6 :

$$-\cancel{\omega_0^2 X} + i \frac{1}{\tau} \omega_0 X + \cancel{\omega_0^2 X} = \frac{F_0}{m}$$

les termes en  $\ddot{X}$  et  $X$  s'annulent :

$$i \frac{1}{\tau} \omega_0 X = \frac{F_0}{m}$$

Les deux termes restant disent que la force extérieure et les forces de frottements fluides s'équilibrent à condition que l'amplitude prenne la valeur  $(F_0 \tau) / (m \omega_0)$ . Nous allons retrouver cette idée en regardant plus en détail les aspects énergétiques.

- 30. Lorsque l'intensité de la force est au maximum, l'oscillateur est à sa position d'origine
- 31. Lorsque l'intensité de la force est au maximum, l'oscillateur est à sa position la plus négative.

### 2.3.4 Aspects énergétiques

Regardons de plus près le mouvement de l'oscillateur amorti en régime permanent (OARP), il a un mouvement harmonique à la pulsation  $\omega$ . L'OARP a donc le même comportement qu'un oscillateur harmonique. On pourrait donc être tenté de penser que l'énergie mécanique au sein de l'OARP est constante. Or, nous savons qu'il n'en est rien car les frottements fluides sont une force non conservative qui dissipe de l'énergie sous forme de chaleur. Il y a donc une source d'énergie qui doit compenser les pertes par frottements fluides. Cette énergie est apportée par l'opérateur qui met en mouvement le système à la pulsation  $\omega$ . Plus précisément, l'énergie apportée par l'opérateur compense *exactement* l'énergie dissipée par les frottements fluides. En effet, si la force excitatrice apportait un peu moins d'énergie que celle perdue par les frottements fluides, l'amplitude décroîtrait au cours du temps; s'il en apportait un peu plus l'amplitude augmenterait au cours du temps lors du régime permanent<sup>32</sup>.

Nous allons maintenant voir que l'énergie transmise par l'opérateur à l'oscillateur, même si elle compense exactement les pertes des frottements fluides, passe par un maximum lorsque la fréquence imposée par l'opérateur est égale à la fréquence de résonance. Autrement dit, il n'y a un *transfert*<sup>33</sup> d'énergie efficace de l'opérateur extérieur vers le système oscillant qu'aux alentours de la résonance.

La variation temporelle d'énergie mécanique est due aux puissances des forces non conservatives (théorème de l'énergie mécanique) :

$$\frac{dE}{dt} = P(\mathbf{F}) + P(\mathbf{f})$$

Avec  $P(\mathbf{F})$  la puissance de la force mise en jeu par l'opérateur :

$$\begin{aligned} P(\mathbf{F}) &= \mathbf{F}\mathbf{v} = [F_0 \cos(\omega t)] [F_0 v_0 \cos(\omega t + \Phi_v)] \\ &= F_0 v_0 \frac{\cos(2\omega t + \Phi_v) + \cos(\Phi_v)}{2} \end{aligned}$$

et  $P(\mathbf{f})$  la puissance des forces de frottements fluides :

$$P(\mathbf{f}) = \mathbf{f}\mathbf{v} = -\alpha v^2 = -\alpha v_0^2 \frac{\cos(2\omega t + 2\Phi_v) + 1}{2}$$

Remarquons que :

- Les échanges d'énergie se font à la pulsation  $2\omega$  soit deux fois plus vite que le mouvement.
- Les échanges d'énergie sont déphasés de  $\Phi_v$  qui est le déphasage de la vitesse par rapport au mouvement de l'opérateur. Le déphasage entre le mouvement  $x$  et la vitesse  $v$  vaut<sup>34</sup>  $\pi/2$ , soit  $\Phi_v = \Phi_x + \pi/2$ .

Sur une période la variation d'énergie est nulle, car sinon on verrait le mouvement croître ou décroître en régime permanent :

$$\frac{d\langle E \rangle}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle P(\mathbf{F}) \rangle = - \langle P(\mathbf{f}) \rangle$$

32. Lors du régime transitoire proche de la résonance  $\omega \approx \omega_0$ , on peut avoir l'impression que l'amplitude de l'oscillateur augmente lentement pour atteindre un maximum. Il n'en est rien, cela est dû aux battements entre le régime pseudo-périodique et le régime permanent dont l'amplitude  $|X_0|$  est bien constante.

33. Insistons sur cette idée : la résonance n'est pas une "création spontanée" d'énergie, c'est la maximisation du *transfert* d'énergie du monde extérieur vers l'oscillateur

34. La dérivée par rapport au temps de  $x(t)$  qui est en cosinus donne pour la vitesse  $v$  un sinus qui est donc déphasé de  $\pi/2$  par rapport au mouvement  $x$

Les puissances moyennes s’obtiennent facilement en prenant en compte le fait que la moyenne sur une période de la fonction  $\cos^2(\omega t)$  vaut  $1/2$  et celle de  $\cos(2\omega t)$  vaut 0 :

$$\langle P(F) \rangle = \frac{F_0 v_0 \cos \Phi_v}{2} \quad \text{et} \quad \langle P(f) \rangle = \frac{-\alpha v_0^2}{2}$$

35. Avec  $\cos \Phi_v = \cos(\Phi_x + \pi/2) = \sin(\Phi_x)$

d’où, en moyenne, l’équilibre énergétique se traduit par<sup>35</sup> :

$$v_0 = \frac{F_0 \sin(\Phi_x)}{\alpha}$$

36. Si le mouvement s’écrit  $x(t) = X_0 \cos(\omega t)$ , la vitesse vaut  $v = \dot{x} = -X_0 \omega \sin(\omega t) = -X_0 \omega \cos(\omega t + \pi/2)$ . D’où le déphasage de  $\pi/2$ . Alternativement en écriture complexe la dérivée temporelle est remplacée par une multiplication par  $i\omega$  avec  $i = e^{i\pi/2}$  d’où à nouveau le déphasage de  $\pi/2$

Revenons sur le déphasage de la position  $\Phi_x$  par rapport au mouvement de l’opérateur externe. Nous pouvons maintenant voir pourquoi ce dernier est optimum à la résonance et vaut  $\pi/2$ . La puissance transmise de la force extérieure vaut, en norme, l’intensité de la force  $F_0$  multipliée par la vitesse  $v$  de la masse  $m$ . Or si le déphasage  $\Phi_x$  vaut 0, c’est le mouvement  $x(t)$  qui est en phase avec la force et pas la vitesse. La vitesse étant la dérivée temporelle de la position, la vitesse  $v$  et la position  $x$  sont déphasées<sup>36</sup> de  $\pi/2$ . En d’autres termes, nous voulons que la force extérieure soit en phase non pas avec le mouvement  $x(t)$ , mais avec la vitesse  $v(t)$ . Plus précisément, une phase de  $\Phi_x = \pi/2$ , veut dire que le vecteur de la force  $F$  de l’opérateur pointe toujours vers la droite lorsque la masse se déplace vers la droite et toujours vers la gauche lorsque la masse se déplace vers la gauche. Le travail de la force extérieure  $F$  est donc toujours positif ce qui conduit à la résonance.

### 2.3.5 Notion d’impédance mécanique

Par analogie avec l’électrocinétique (voir 2.4), on définit une impédance mécanique qui représente la manière avec laquelle l’oscillateur va s’opposer à l’apparition d’une vitesse  $v_0$  pour une amplitude de force  $F_0$  de l’opérateur donnée. Elle dépend de la fréquence, et elle représente à la fois une amplitude et un déphasage entre force et vitesse, c’est donc un nombre complexe  $\underline{Z}$  défini par :

$$\underline{Z} = \frac{F}{V}$$

L’étude de l’impédance de l’oscillateur étudié dans ce chapitre montrerait qu’il s’agit d’un filtre passe-bas pour l’élongation et passe-bande pour la vitesse<sup>37</sup>.

Nous reviendrons sur la notion d’impédance lorsque nous aborderons le cas des ondes (cf chapitre 7 p111).

### 2.3.6 Vue d’ensemble

Après un régime transitoire mettant en jeu le régime libre de l’oscillateur et pouvant présenter des battements, le système se stabilise sur un mouvement harmonique à la pulsation  $\omega$  imposée par la force

37. Dans le cadre de l’analogie électromécanique (cf 2.4), on retrouve que dans un circuit RLC série, on a un filtre passe-bas (résonant) au niveau de la tension du condensateur (qui est proportionnelle au nombre de charges  $q$  et qui est donc analogue à la position  $x$ ), un filtre passe-bande au niveau de la tension aux bornes résistance (qui est proportionnelle à l’intensité du courant et donc analogue de la vitesse) et un passe-haut (résonant) pour la tension aux bornes de l’inductance (qui est proportionnelle à la dérivée temporelle du courant et qui a pour analogue mécanique l’accélération)

extérieure. L'amplitude et le déphasage du mouvement harmonique sont fonction de l'accord entre la pulsation  $\omega$  imposée et la pulsation propre du système  $\omega_0$ .

$\omega \ll \omega_0$  La force oscille tellement lentement que le pour l'oscillateur tout se passe comme si la force ne variait pas dans le temps. L'élongation vaut donc  $x = F/k$ .

$\omega \approx \omega_0$  C'est la résonance pour peu que le facteur de qualité  $Q$  soit suffisant ( $Q \gtrsim 1$ ). La transmission d'énergie de la force extérieure  $F$  vers le système est maximale. l'oscillateur prend alors son amplitude maximale. Le déphasage vaut  $\pi/2$ .

La résonance peut être une caractéristique souhaitée<sup>38</sup> ou, au contraire, une conséquence catastrophique<sup>39</sup>.

$\omega \gg \omega_0$  La force oscille tellement vite que le système n'arrive plus à suivre. Non seulement l'amplitude des oscillations est très faible, mais le système est déphasé de  $180^\circ$ . A peine la masse  $m$  essaye de se mettre en mouvement en suivant la consigne de la force  $F$ , que la force  $F$  change de sens. Au bilan<sup>40</sup>, la masse  $m$  ne se déplace quasi plus<sup>41</sup>.

## 2.4 Analogie Électromécanique

Comme évoqué précédemment, le modèle de la masse-ressort est bien plus universel qu'il n'y paraît. Il peut aussi bien s'appliquer à la modélisation d'un électron en vibration dans un atome soumis à un champ électrique dans le visible (voir exercice 2.5.3) qu'au nombre de charges dans un circuit électrique oscillant. Nous allons maintenant développer un peu plus ce que l'on appelle l'*analogie électromécanique*, c'est à dire le fait qu'à chaque variable mécanique, on peut associer une variable électrique équivalente. Cela permettra par exemple de réaliser des chaînes d'oscillateur à partir de composant électronique<sup>42</sup> pour illustrer les phénomènes de propagation.

Le point de départ est d'accepter l'équivalence entre la position  $x$  dans un système mécanique et la charge  $q$  d'un circuit électrique  $x \longleftrightarrow q$ . A partir de là vont découler toutes les analogies.

Un mouvement de charge  $q$  crée un courant, et il est donc normal de faire l'analogie entre la vitesse  $v = \frac{dx}{dt}$  et le courant  $i = \frac{dq}{dt}$  :  $v \longleftrightarrow i$ .

Les variations de vitesse  $v$  sont dues aux forces  $F$  (cf PFD); de même que c'est la tension électrique ou plus exactement la force électromotrice  $U$  qui crée des variations de courant. Donc  $F \longleftrightarrow U$ . On retrouve au passage l'analogie entre la puissance mécanique et la puissance électrique  $P_{meca} = Fv \longleftrightarrow P_{elec} = UI$ .

Une inductance  $L$  s'oppose aux variations d'un courant  $i$ , de même qu'une masse  $m$ , l'inertie, s'oppose aux variations de vitesse  $v$ . On a donc  $m \longleftrightarrow L$  (comme on peut le voir dans le parallèle entre l'énergie cinétique ( $\frac{1}{2}mv^2$ ) et l'énergie magnétique stockée dans une bobine  $\frac{1}{2}Li^2$ ).

38. C'est le cas par exemple pour les sismographes mécaniques. On veut que le mouvement de l'aiguille soit le plus grand possible lorsque les ondes du tremblement de terre le mettent en mouvement.

39. Ce fut le tragique cas à Angers sur le Pont de la Basse Chaine (celui reliant le château à la Doutre) en 1850. Le 18 avril, alors que le vent faisait déjà légèrement osciller le pont, le 11<sup>e</sup> régiment d'infanterie décide de traverser le pont sans espacer les troupes, et surtout sans rompre le pas, ce qui met le pont en résonance (à une fréquence de l'ordre de quelque Hertz donc). Le pont s'écroule violemment conduisant à plus de 200 morts.

40. Dit autrement, le système subit la *valeur moyenne* de l'excitation. Puisque l'excitation est sinusoïdale, sa moyenne est nulle.

41. C'est, dans une certaine mesure, ce qui arrive pour les marées en mer méditerranée. Cette dernière ne peut se vider ou se remplir uniquement que par le canal de Gibraltar, ce qui fait que son temps de remplissage  $\tau_r$  est relativement long. C'est à dire bien plus long que le temps de sollicitation des marées qui est de  $\tau_m \approx 6$  h. La fréquence d'excitation de l'eau de la mer méditerranée par la force de marée de la Lune est beaucoup trop grande par rapport à la fréquence propre de remplissage de la mer. Au total, les marées, en moyenne, sont de bien plus faibles amplitudes qu'en Atlantique.

42. Ce qui est beaucoup plus facile à mettre en œuvre qu'un système équivalent mécanique (cf TP)

Un condensateur  $C$  stocke des charges de la même manière qu'un ressort stocke de l'énergie potentielle (reliée à la position  $x$ ). On a donc  $k \longleftrightarrow 1/C$  (comme on peut le voir dans le parallèle entre l'énergie potentielle élastique ( $\frac{1}{2}kx^2$ ) et l'énergie électrostatique stockée dans un condensateur  $\frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$ ).

Le coefficient de frottement  $\alpha$  est celui qui est responsable de la perte d'énergie du système sous forme de chaleur, il est donc l'équivalent de la résistance  $R$  (cf effet Joule). L'expression de la force de frottement fluide  $F = -\alpha v$  est donc analogue à la loi d'Ohm  $U = Ri$ .

Munis de ces analogies (cf tableau 2.1), on retrouve bien l'équation différentielle qui décrit l'évolution temporelle de la charge  $q$  sur les plaques d'un condensateur dans un circuit RLC

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0 \quad \longleftrightarrow \quad L\ddot{q} + R\dot{q} + q/C = 0$$

TABLE 2.1: Tableau de l'analogie électromécanique

Mécanique	$x$	$v$	$F$	$m$	$k$	$\alpha$
Électrique	$q$	$i$	$U$	$L$	$1/C$	$R$

Encart 4 : Circuit résonant RLC

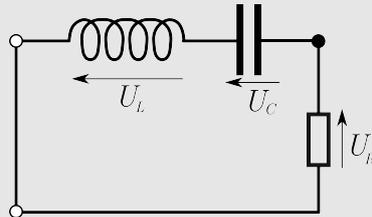


FIGURE 2.9: Schéma du circuit résonant RLC

Appliquons la loi des mailles à l'ensemble du circuit :

$$U_C + U_R + U_L = 0$$

En utilisant l'équation de fonctionnement d'un condensateur ( $U_C = q/C$ ), la loi d'Ohm  $U_R = Ri = R\dot{q}$  et la loi de fonctionnement d'une bobine ( $U_L = Ldi/dt = L\dot{q}$ ), nous obtenons :

$$\frac{q}{C} + R\dot{q} + L\ddot{q} = 0$$

soit :

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{q}{LC} = 0 \tag{2.12}$$

et nous retrouvons l'équation différentielle 2.1 du début du chapitre gouvernant la position de l'oscillateur libre amorti avec :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{L}{R}$$

ce que nous aurions aussi pu obtenir avec le tableau d'équivalence de l'analogie électromécanique 2.1.

## 2.5 TD 2

## Questions de cours

1. Quelle est l'expression générale des forces de frottements, quelles sont les conditions pour utiliser  $F = -\alpha v$  ?
2. Donner l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique amorti en régime libre.
3. Quelle est l'interprétation physique du facteur de qualité pour le régime libre ? Quelle est sa définition mathématique ?
4. Dessiner sur une même figure les trois types de régime pour l'oscillateur harmonique amorti libre. Rappeler pour quelle valeur du facteur de qualité ces trois régimes apparaissent.
5. Dessiner l'évolution de l'énergie du système dans le cas du régime pseudo-périodique.
6. Pourquoi est-on sûr que la réponse en régime permanent de l'oscillateur est à la même pulsation que celle imposée par l'opérateur ?
7. Quelle est la durée du régime transitoire lors du début d'une mise en oscillations forcées de l'oscillateur ?
8. Retrouver l'expression de l'amplitude complexe  $|X|$  des oscillations forcées en régime permanent.
9. Que vaut le déphasage de la position à la résonance ? Celui de la vitesse ? Pourquoi cela est facilement compréhensible lorsque l'on étudie plus en détails les aspects énergétiques ?
10. Quelle est l'interprétation du facteur de qualité dans le domaine fréquentiel ? Quel est le lien entre les interprétations temporelles et fréquentielles du facteur de qualité ?
11. Quelle est l'analogie électro-cinétique du courant, de la force et de la capacité d'un condensateur ?

## Retour sur le pendule de Pohl

Nous continuons l'exercice 1.4 en incluant maintenant l'influence d'un amortissement. Ce dernier pourrait être les frottements de l'air, mais le dispositif du pendule de Pohl permet d'apporter des frottements fluides de façon contrôlée via la création de courant de Foucault<sup>43</sup>.

1. *Oscillation libre*. On donne au pendule un angle initial différent de zéro et on le laisse évoluer librement.
  - (a) Les frottements par courant de Foucault sont modélisés par un couple résistant proportionnel à la vitesse angulaire :

$$M_{\text{Foucault}} = -\alpha \dot{\theta} e_z$$

43. Plus précisément, le pendule (qui est en cuivre) passe dans l'entrefer de deux bobines montées en configuration de Helmholtz. Lorsque l'on fait passer un courant dans les bobines, un champ magnétique quasiment constant apparaît entre les deux bobines. Le mouvement du pendule dans ce champ magnétique crée de l'induction (de Lorentz). La force électromotrice créée des courants au sein du pendule que l'on appelle *courant de Foucault* (Eddy current en anglais). Par application de *Lenz*, qui dit que tout effet inductif s'oppose aux causes qui lui ont donné naissance, nous savons que les courants de Foucault vont avoir pour effet de diminuer ce qui leur a donné naissance : le mouvement du pendule. On montre que ces frottements sont proportionnelles à la vitesse du pendule, tout comme des frottements fluides.

Écrire l'équation différentielle gouvernant le mouvement. On introduira le temps caractéristique d'amortissement  $\tau$ .

Résoudre l'équation précédente dans le cas des faibles frottements fluides, c'est à dire  $Q > 1/2$  avec  $Q$  le facteur de qualité défini par  $Q = \omega_0 \tau$ .

- (b) Les frottements sont réglés de sorte à avoir  $Q = 6$ . Dessiner l'allure globale de l'évolution temporelle de l'angle du pendule  $\theta(t)$ .
  - (c) Quelle est l'écart relatif (en valeur numérique) entre la pulsation du mouvement amorti et la pulsation des oscillations libres ?
  - (d) On augmente le courant dans les bobines pour arriver à des courants de Foucault tel que  $Q < 1/2$ . Dessiner l'allure globale de l'évolution temporelle de l'angle du pendule  $\theta(t)$ .
2. *Oscillation forcées.* Un moteur entraîne maintenant le pendule dans un mouvement sinusoïdale à la pulsation  $\omega$ .
- (a) Établir l'équation différentielle régissant le système.
  - (b) On se place en régime permanent, résoudre l'équation différentielle en utilisant la méthode de la variable complexe.
  - (c) On se place dans le cas  $Q > 1/2$ . Dessiner l'évolution temporelle de l'angle du pendule  $\theta(t)$  durant l'intervalle  $t \in [0; 2\tau]$ . Donner la formule décrivant cette courbe.
  - (d) Donner l'allure générale de l'évolution de l'amplitude en régime permanent en fonction de la pulsation  $\omega$  imposée au pendule. Faire de même pour la phase.
  - (e) Donner l'évolution générale des deux courbes précédentes avec le facteur de qualité  $Q$ .

### 2.5.1 Retour sur la vibration d'une molécule diatomique

Il s'agit de la suite de l'exercice 1.4.

1. Le temps caractéristique de réponse de la molécule HCl est environ 1 ns, soit  $\tau = 1 \times 10^{-9}$  s. Donner le facteur de qualité  $Q$  de cet oscillateur. Dans quel domaine de longueur d'onde faudrait-il travailler pour briser cette liaison en l'éclairant ?
2. Le molécule est maintenant excitée à sa fréquence propre par un champ électrique  $E(t) = E_0 \cos(\omega_0 t)$ ; nous supposons que la force subie alors par le noyau d'hydrogène est  $F(t) = \beta e E(t)$  où  $\beta$  est de l'ordre de l'unité. Déterminer l'amplitude des oscillations forcées. Estimer l'ordre de grandeur du champ nécessaire pour briser la molécule. Discuter la validité du modèle linéaire, et le choix de la longueur d'onde excitatrice.

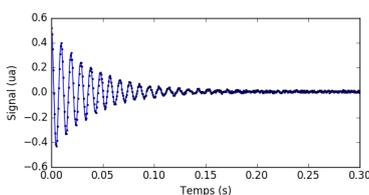


FIGURE 2.10: Oscillation libre dans un résonateur de Helmholtz (ici un ballon de chimie)

### 2.5.2 Retour sur le résonateur de Helmholtz

La figure 2.10 présente le résultat expérimental des oscillations libres d'un résonateur de Helmholtz.

1. Donner une estimation du facteur de qualité de l'oscillateur
2. Donner une estimation de la bande passante autour de la résonance.

### 2.5.3 Résonance en vitesse

1. Donner l'expression de la vitesse de l'oscillateur harmonique amorti en régime permanent
2. Étudier l'amplitude de la vitesse et l'évolution du déphasage par rapport à l'opérateur en fonction de la pulsation  $\omega$  imposée par l'opérateur
3. Pour un grand facteur de qualité  $Q (> 10)$ , obtenir l'expression de la bande passante  $\Delta\omega$  autour de la résonance en fonction du facteur de qualité  $Q$  et de la pulsation propre.
4. A quel type de filtre pour la vitesse correspond l'oscillateur étudié dans ce chapitre.

### Amortisseur de voiture

Un amortisseur de voiture est représenté sur la figure 2.11 et schématisé sur la figure 2.12. L'amortisseur est constitué d'un ressort de constante de raideur  $k$  et d'un amortisseur de constante d'amortissement fluide  $\alpha$ .

La voiture est sommairement modélisée par une masse  $m$ . On considère que nous pouvons considérer les 4 roues identiques.

### Conception de l'amortisseur

**Choix de la constante de raideur** La caisse de la voiture au repos est à 20 cm du sol. On veut que lorsque la voiture est chargée au maximum, soit 2 tonnes supplémentaires soit 500 kg supplémentaire par roue, les roues soient alors à 10 cm du sol. Quelle valeur de la constante de raideur  $k$  du ressort faut-il alors choisir ?

**Choix du facteur d'amortissement** Le facteur d'amortissement fixe entre autres la valeur du facteur de qualité  $Q$  de l'amortisseur.

- Quelle est la valeur idéale pour le facteur de qualité  $Q$  pour les amortisseurs d'une voiture ? Expliquer pourquoi.
- Calculer alors la valeur du coefficient d'amortissement  $\alpha$  pour atteindre cette valeur du facteur de qualité  $Q$  pour une masse considérée comme normale de la voiture, c'est à dire 1000kg pour la voiture et 250kg pour le chargement le tout divisé par 4 soit environ 325 kg .

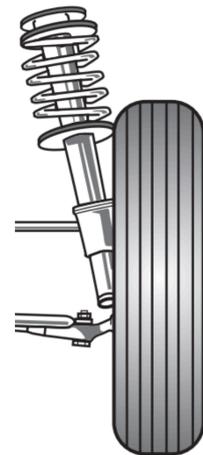


FIGURE 2.11: Dessin d'un amortisseur

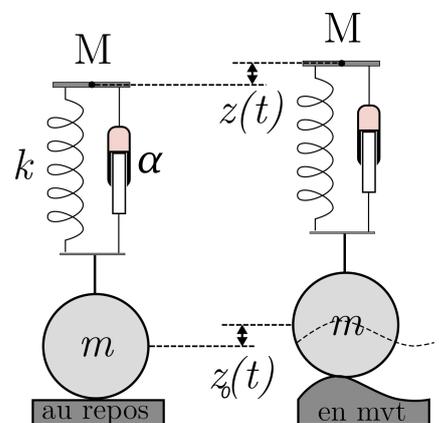


FIGURE 2.12: Modélisation de l'amortisseur

— Comment se comportent les oscillations libres<sup>44</sup> de la voiture lorsque la voiture est surchargée ? Lorsqu'elle roule à vide ?

*Oscillations forcées sur une route ondulé* Si vous avez beaucoup pratiqué les routes non asphaltées, vous avez probablement constaté qu'elles arborent souvent des creux et des bosses transversales régulièrement espacées. Ces déformations, gênantes, voire dangereuses pour les automobilistes, se forment à la suite du passage répété de véhicules sur une chaussée meuble.

Nous allons brièvement étudier les effets de ces déformations, appelées *corrugations*, sur une voiture.

Nous modélisons le phénomène ainsi : le véhicule va à la vitesse constante  $v$  sur une route dont le profil impose au centre  $O$  de la roue une élongation :

$$z_O = a \cos\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right)$$

où  $\lambda$  est la période des corrugations.

On repère la position de la masse par son élongation  $z(t)$  par rapport à sa position d'équilibre au repos (cf schéma 2.12).

1. On rappelle que l'amortisseur placé entre  $O$  et  $M$  exerce une force de frottement fluide proportionnelle à la vitesse relative de  $M$  par rapport à  $O$  :

$$f_r = -\alpha(\dot{z}_M(t) - \dot{z}_O(t))e_z$$

Montrer que cette force peut aussi se mettre sous la forme :

$$f_r = -\alpha\dot{z}e_z - \alpha a \omega \sin \omega t e_z$$

en posant :

$$\omega = \frac{2\pi v}{\lambda}$$

2. On rappelle de même que la force exercée par le ressort est proportionnelle au déplacement relatif ( $z_M(t) - z_O(t)$ ). Donner l'expression de cette force de Hooke.
3. Établir l'équation différentielle en  $z(t)$  du mouvement de la masse, lorsque le véhicule se déplace à la vitesse  $v$
4. Montrer<sup>45</sup> que l'amplitude du mouvement d'oscillation verticale en régime permanent se met sous la forme :

$$z_m(\omega) = |z| = a \sqrt{\frac{k^2 + (\alpha\omega)^2}{(k - m\omega^2)^2 + (\alpha\omega)^2}}$$

5. Pour quelle pulsation le véhicule rentre-t-il en résonance ? A quelle vitesse  $v$ , cela correspond-t-il ? Application numérique avec  $\lambda = 18$  m et  $a = 1$  cm, exprimer  $v$  en km/h.
6. Sur un tronçon de route ondulé, la voiture rentre en résonance et commence à énormément vibrer. Comment, en tant que conducteur, mettre fin à la résonance ?

45. On rappelle qu'un terme en  $\sin \omega t$  a le terme  $-ie^{i\omega t}$  comme représentation complexe

### Modèle de l'électron élastiquement lié

Ce modèle est dû au physicien hollandais Lorentz. Il s'agit d'un modèle purement classique qui donne étonnamment d'excellents résultats pour décrire par exemple l'interaction lumière-matière.

Un électron assimilé à un point de masse  $m$  est soumis à trois forces :

- Une force de rappel linéaire due à l'interaction électrostatique de constante de raideur apparente  $k$ .
- Une force de frottement visqueuse  $f = -\lambda v$  qui traduit de façon phénoménologique les pertes d'énergie dues au rayonnement électromagnétique de l'électron.
- Un champ électrique provenant d'une onde électromagnétique sinusoïdale à la pulsation  $\omega$  dans le spectre visible, avec  $F = -eE_0 \cos(\omega t)e_x$ . La taille de l'atome est tellement petite par rapport à la longueur d'onde de l'onde électromagnétique, que pour un instant  $t$  donné, le champ électrique est uniforme au niveau de l'atome.

On suppose un mouvement unidimensionnel et la position de l'électron sera repérée par la coordonnée  $x$ , avec  $x = 0$  en l'absence de champ électrique.

1. Obtenir l'expression de l'amplitude complexe  $\underline{X}$  de l'électron
2. Obtenir l'accélération complexe.
3. Toute particule chargée qui accélère émet un rayonnement proportionnel à son accélération (formule de Larmor). Plus précisément, pour des vitesses inférieures à celle de la vitesse de la lumière, la puissance rayonnée  $P$  par l'électron vaut :

$$P = \frac{e^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

- A quelle pulsation est rayonnée<sup>46</sup> l'énergie de l'électron ?
- L'atome est en fait une molécule dans le ciel qui est éclairé par le soleil dont les fréquences sont toutes très inférieures à la pulsation propre de la molécule  $\omega_0$ . De plus  $\lambda/m$  est aussi petit devant  $\omega_0$ . Donner l'expression de la puissance rayonnée.
- Expliquer qualitativement pourquoi le ciel apparaît bleu.

46. On appelle diffusion (scattering en anglais), l'onde ré-émise par l'atome à cause du champ électrique. Son interprétation quantique est complexe et met en jeu des niveaux d'énergies virtuelles.

## 2.6 CQFR

### Connaissances

1. Les frottements fluides à faible nombre de Reynolds sont proportionnels à la vitesse.
2. En régime libre l'oscillateur harmonique amorti peut avoir deux types de comportement :
  - pseudo-périodique
  - apériodique
 Connaitre les courbes des évolutions temporelles de ces deux cas de figures.
3. Lors de l'évolution libre de l'oscillateur, l'énergie oscille toujours entre énergie potentielle et énergie cinétique, mais une partie est transférée vers l'extérieur sous forme d'énergie thermique via les frottements.
4. En régime forcé à la pulsation  $\omega$ , l'oscillateur finira par avoir un mouvement harmonique à la pulsation  $\omega$  car le système est *linéaire*. Néanmoins, le déphasage entre le mouvement imposé et le mouvement de l'oscillateur ainsi que l'amplitude des oscillations dépendent de la fréquence  $\omega$ .
5. La mise en mouvement forcée de l'oscillateur commence par un régime transitoire où le mouvement effectif de l'oscillateur est la somme de son évolution libre et le régime forcé.
6. Après le régime transitoire, qui dure le temps du régime libre ( $\approx \tau$  ou  $\approx Q$  oscillations), on atteint le régime permanent.
7. Lorsque la pulsation imposée  $\omega$  est proche de la pulsation  $\omega_0$  propre de l'oscillateur le phénomène de *résonance* se produit :
  - L'amplitude des oscillations prend sa valeur maximale
  - Le déphasage vaut  $\pi/2$
8. La résonance est d'autant plus marquée que le facteur de qualité  $Q = \omega_0\tau$  de l'oscillateur est grand.
9. Le facteur de qualité  $Q = \omega_0\tau$  peut prendre deux significations :
  - en temporel : nombre d'oscillation en régime libre
  - en fréquentiel : acuité de la résonance.
10. En régime permanent, l'énergie apportée par l'opérateur compense exactement l'énergie perdue dans les frottements.
11. A la résonance, le transfert d'énergie de l'opérateur vers l'oscillateur est maximum.
12. Les équations établies lors de ce chapitre ont un caractère universel, l'analogie électromécanique en est un exemple.

*Savoir-faire*

1. Savoir établir l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique amorti par frottement fluide.
2. (\*) Savoir résoudre l'équation gouvernant le régime libre d'un oscillateur harmonique amorti par frottement fluide.
  - Savoir retrouver l'expression du régime pseudo-périodique
  - Savoir retrouver l'expression du régime apériodique.
3. Savoir retrouver l'expression de l'énergie potentielle et cinétique de l'oscillateur dans le cas pseudo-périodique.
4. Savoir écrire l'expression du régime transitoire comme la somme du régime libre (solution de l'équation homogène) et du régime forcé (solution particulière).
5. (\*) Savoir obtenir la solution particulière de l'équation différentielle en régime sinusoïdal forcé à partir de la méthode de la variable complexe.
6. (\*) A partir de l'expression complexe de la position de l'oscillateur, savoir obtenir l'expression de l'amplitude et du déphasage du mouvement harmonique obtenu en régime permanent.
7. Savoir retrouver les caractéristiques de la résonance (pulsation, amplitude et déphasage).
8. Savoir établir les analogies électromécaniques





## 3 Oscillateurs couplés

DANS LE PREMIER CHAPITRE, nous avons étudié l'oscillateur harmonique, c'est à dire, en ce qui nous concerne, la cellule unitaire d'une onde. L'oscillateur harmonique n'échange pas d'énergie avec l'extérieur. Par contre, il effectue de façon cyclique des conversions internes d'énergie. L'énergie cinétique est transformée en énergie potentielle et inversement à une fréquence qui définit la fréquence propre de l'oscillateur.

Dans le second chapitre, nous avons introduit un premier canal de transfert de l'énergie vers l'extérieur : une perte d'énergie par frottement fluide. Cette étape est indispensable pour décrire les oscillateurs qui nous entourent.

Dans ce chapitre, nous allons ajouter un nouveau canal de transfert d'énergie. Il ne sera pas vers l'extérieur mais *vers un autre oscillateur*. On parle alors de *couplage*. Nous allons alors voir que l'énergie injectée dans le premier oscillateur se propage vers l'autre oscillateur. On se rapproche de la propagation.

Nous allons tout d'abord repartir du système masse-ressort auquel nous allons adjoindre un second masse-ressort avec un ressort de couplage entre les deux (nous commencerons par le cas symétrique). Nous allons voir que le système, en régime libre, ne possède plus alors une seule fréquence propre mais *deux*. Nous les associerons à ce que nous allons appeler les *modes*. Nous verrons que pour chaque fréquence du mode, correspond un mouvement harmonique et que n'importe quel mouvement du système couplé peut être écrit comme la combinaison linéaire des deux modes.

Nous prolongerons ensuite ce raisonnement avec 2 oscillateurs non symétriques. Nous introduirons ensuite une méthode<sup>1</sup> générale de résolution mathématique du système de 2 équations différentielles gouvernant le système.

Enfin nous nous intéresserons au régime forcé d'un système couplé. Nous verrons, comme pour les modes, l'apparition de deux fréquences de résonance mais aussi un nouveau phénomène appelé anti-résonance.

### Sommaire

3.1 Régime Libre . . . . .	50
3.2 Régime forcé. . . . .	57
3.3 TD 3 . . . . .	61
3.4 CQFR . . . . .	66

1. Une deuxième méthode est donnée en annexe A

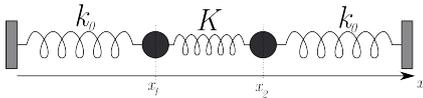


FIGURE 3.1: Système de 2 masse-ressort couplés et symétriques

### 3.1 Système masse-ressort symétrique en régime libre

Soit le système décrit sur la figure 3.1. Il s'agit de deux oscillateurs harmoniques de type masse-ressort identiques (même masse  $m_0$  et même constante de raideur  $k_0$ ). Ils sont couplés par un ressort de constante de raideur  $K$ .

Désignons par  $x_1$  et  $x_2$  les déplacements des deux masses par rapport à leur position d'équilibre. L'application du PFD à chacune des deux masses donne deux équations :

#### Encart 1 : Couplage par un ressort et algébrisation des forces

Voici une méthode pour déterminer les signes + ou – pour le ressort de couplage  $K$ .

Intéressons-nous à l'action de ce ressort de couplage sur la masse 1. Le ressort peut changer de longueur soit via un changement de la position de la masse 2  $x_2$ , soit par un changement de la position de la masse 1  $x_1$ . Étudions successivement ces deux possibilités.

Si on déplace mentalement la masse  $m_2$  dans la direction  $x > 0$  (soit  $\Delta x_2 > 0$ ) tout en maintenant la masse  $m_1$  en place, cela étire le ressort de couplage  $K$ . Si ensuite on lâche la masse  $m_1$ , le ressort de couplage  $K$  a pour action d'entraîner la masse  $m_1$  vers la droite (vers les  $x > 0$ ), c'est à dire un étirement positif ( $\Delta x_1 > 0$ ). Comme  $\Delta x_1$  et  $\Delta x_2$  sont de même signe, il faut mettre un signe + pour la force exercée sur la masse 1 par le ressort de couplage  $K$  lorsque l'on déplace la masse 2  $\mathbf{F}_{K,x_2} = Kx_2\mathbf{e}_x$ .

Maintenant, si on déplace mentalement la masse  $m_1$  dans la direction  $x > 0$  ( $\Delta x_1 > 0$ ), tout en maintenant cette fois la masse  $m_2$  en place, cela comprime le ressort de couplage  $K$ . Si ensuite on lâche la masse  $m_2$ , le ressort de couplage a pour action d'entraîner la masse  $m_1$  vers les  $x < 0$  ( $\Delta x'_1 < 0$ ). Comme  $\Delta x_1$  et  $\Delta x'_1$  n'ont pas le même signe, il faut mettre un signe – pour la force exercée par le ressort de couplage sur la masse 1 lorsque l'on déplace la masse 1  $\mathbf{F}_{K,x_1} = -Kx_1\mathbf{e}_x$

On peut ensuite appliquer la même démarche pour évaluer l'effet du ressort de couplage sur sur la masse 2.

$$\begin{aligned} m_0\ddot{x}_1 &= -k_0x_1 + K(x_2 - x_1) \\ m_0\ddot{x}_2 &= -k_0x_2 + K(x_1 - x_2) \end{aligned} \quad (3.1)$$

On peut tout d'abord remarquer que puisque le système possède deux degrés de liberté, il doit être décrit par deux équations différentielles. D'autre part, les deux équations sont couplées car  $x_2$  apparaît dans l'équation différentielle portant sur  $x_1$  et inversement. Nous

verrons au 3.1.3 une méthode générale, fondée sur l’algèbre linéaire, pour trouver la solution de ces deux équations différentielles. Ici il existe un changement de variable évident<sup>2</sup> qui permet de découpler les deux équations.

Posons en effet

$$u = x_1 + x_2 \quad \text{et} \quad v = x_1 - x_2$$

puis dans un premier temps additionnons les deux équations différentielles de 3.2 :

$$m_0 (\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -k_0 (x_1 + x_2) \Leftrightarrow \ddot{u} = -\frac{k_0}{m_0} u$$

et dans un deuxième temps soustrayons les deux équations :

$$m_0 (\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = -k_0 (x_1 - x_2) - 2K (x_1 - x_2) \Leftrightarrow \ddot{v} = -\frac{k_0}{m_0} v - 2\frac{K}{m_0} v$$

Nous obtenons alors deux équations différentielles correspondant au mouvement de l’oscillateur harmonique :

$$\begin{aligned} \ddot{u} + \omega_1^2 u &= 0 \\ \ddot{v} + \omega_2^2 v &= 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Où on a posé deux pulsations<sup>3</sup> :

$$\omega_l = \sqrt{\frac{k_0}{m_0}} \quad \text{et} \quad \omega_r = \sqrt{\frac{k_0 + 2K}{m_0}} \tag{3.3}$$

Nous voyons donc que même si le mouvement des deux pendules semble difficile à appréhender, étonnamment, le mouvement de  $x_1 + x_2$  ou  $x_1 - x_2$  est toujours simple : il s’agit d’un mouvement harmonique.

La solution des équations différentielles harmoniques découplées en  $u$  et  $v$  est directe :

$$u = a_l \cos(\omega_l t + \Phi_l) \quad \text{et} \quad v = b_r \cos(\omega_r t + \Phi_r)$$

puis

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{(u + v)}{2} = A_l \cos(\omega_l t + \Phi_l) + B_r \cos(\omega_r t + \Phi_r) \\ x_2(t) &= \frac{(u - v)}{2} = A_l \cos(\omega_l t + \Phi_l) - B_r \cos(\omega_r t + \Phi_r) \end{aligned} \tag{3.4}$$

où  $A_l, B_r, \Phi_l, \Phi_r$  sont obtenus via les conditions initiales portant sur  $x_1(0), x_2(0), \dot{x}_1(0)$  et  $\dot{x}_2(0)$  (voir ex. 3.3)

Nous venons donc de voir que le cas de deux oscillateurs couplés peut être ramené au cas de deux oscillateurs isolés mais sous plusieurs conditions :

- Il n’y a plus une seule pulsation caractéristique ( $\omega_0$ ), mais deux nouvelles pulsations  $\omega_l$  et  $\omega_r$ . Comme on va le voir par la suite, il y a autant de pulsations caractéristiques qu’il y a de degré de liberté dans le système.

2. En effet, le problème est symétrique, les deux oscillateurs ont même  $m_0$  et  $k_0$ . Si les masses ou la constante de raideur sont différents cette méthode de découplage (somme et différence des équations différentielles) ne fonctionne plus.

3. avec  $l$  pour "lent" et  $r$  pour "rapide"

— Il n’y a pas un seul mouvement harmonique à la pulsation  $\omega_0$ , mais deux mouvements harmoniques ou plutôt la combinaison linéaire de deux mouvements harmoniques. De même, nous allons voir par la suite qu’il faut trouver  $n$  mouvements harmoniques pour décrire, via des combinaisons linéaires, les oscillations d’un système avec  $n$  degrés de liberté.

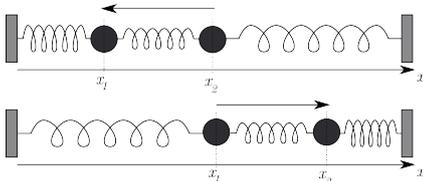


FIGURE 3.2: Oscillateurs couplés symétriques : mode symétrique

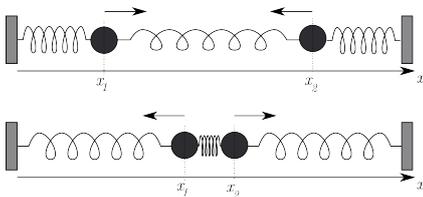


FIGURE 3.3: Oscillateurs couplés symétriques : Mode anti-symétrique

4. Ainsi que des vitesses initiales nulles pour avoir  $\phi_l = 0$

Revenons sur les équations du mouvement 3.4. On peut obtenir une évolution harmonique à  $\omega_l$  pour  $x_1$  et  $x_2$  en imposant mathématiquement :

$$B_r = \phi_r = 0 \Leftrightarrow x_1(t) = x_2(t) = A_l \cos(\omega_l t + \Phi_l)$$

Les deux masses se balancent de droite à gauche à la même pulsation  $\omega_l = \omega_0$  et le même déphasage  $\Phi_l$  (cf fig 3.2). Pour provoquer ce mouvement particulier, il suffit de reproduire cette configuration à l’instant  $t = 0$  en donnant par exemple la même amplitude initiale aux deux pendules<sup>4</sup>. Tout concorde alors : les mouvements de  $x_1$  et  $x_2$  étant les mêmes, le ressort de couplage  $K$  n’est jamais étiré ou comprimé, tout se passe comme s’il n’existait pas. On se retrouve donc avec deux "simples" systèmes masse-ressort de pulsation propre  $\omega_0$ .

On peut obtenir la seconde évolution harmonique, à  $\omega_r$  cette fois pour  $x_1$  et  $x_2$  en imposant mathématiquement

$$A_l = \phi_l = 0 \Leftrightarrow x_1(t) = -x_2(t) = B_r \cos(\omega_r t + \Phi_r)$$

5. Pour un mode donné, la phase relative entre les différents degré de liberté reste constante au cours du mouvement.

6. Si on se fie à nos yeux, il est vraiment difficile de percevoir les modes pour les mouvements quelconques dès 3 degrés de liberté.

Les deux masses oscillent à la pulsation  $\omega_r$  et avec la même phase  $\Phi_r$  mais en miroir l’une de l’autre (cf fig 3.3). On peut initier ce mouvement en plaçant par exemple la première masse à  $x_1(0) = x_0$  et la deuxième à  $x_2(0) = -x_0$ .

La pulsation  $\omega_r$  de ce deuxième mouvement clef est plus grande que  $\omega_0$  car maintenant le ressort de couplage  $K$  est comprimé et étiré ce qui augmente la raideur du ressort totale appliquée sur la masse 1 ou 2.

Ces mouvements "clef" du système où tous les degrés de liberté oscillent à une même fréquence (mais éventuellement avec des amplitudes<sup>5</sup> différentes) sont appelés *modes*.

N’importe quel mouvement arbitraire du système peut être vu mentalement<sup>6</sup> comme la combinaison linéaire des modes du système.

Les modes

Les degrés de liberté du système sont couplés mais les modes ne le sont plus.

Un mode est défini par :

- Sa pulsation.
- Ce que nous allons appeler *forme* du mode.

Plus précisément, il s'agit d'une relation entre les amplitudes et les phases de chacun des degrés de liberté. On peut par exemple mentalement visualiser une photo de l'oscillateur à  $t = 0$  où serait aussi indiquées les vitesses initiales de chaque degré de liberté. Mathématiquement, la forme du mode est définie par un jeu de conditions initiales fixant l'amplitude et la phase *relative* de chaque degré de liberté.

3.1.1 Aspects énergétiques

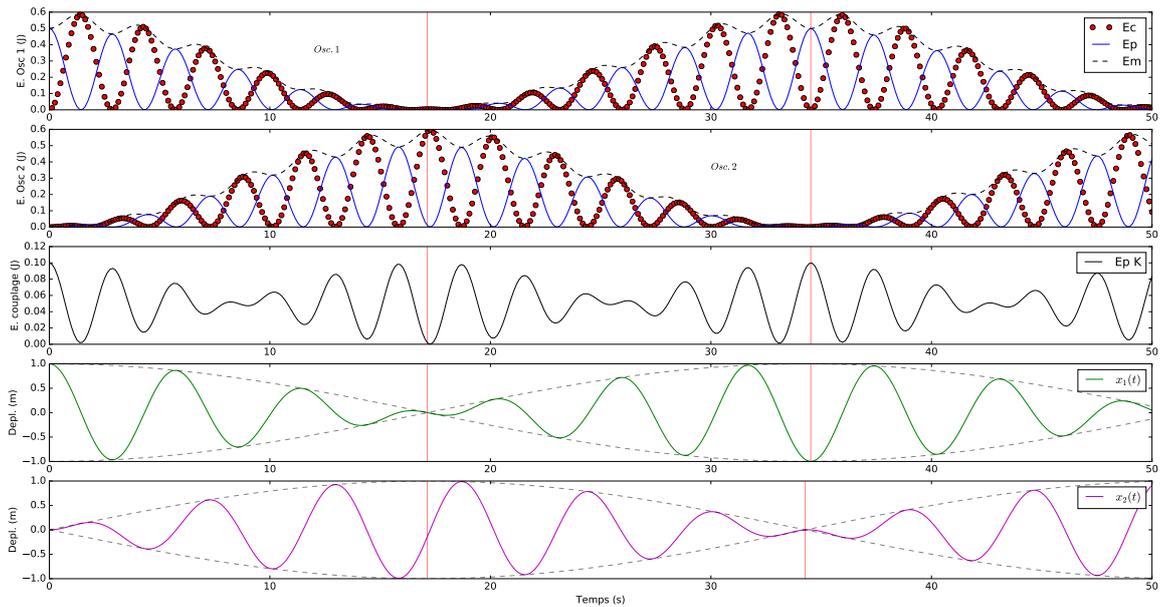


FIGURE 3.4: Évolution de l'énergie dans le cas de deux oscillateurs harmoniques symétriques couplés. Les conditions initiales sont de déplacer la masse  $m_1$  de 1 mètre, et de ne pas donner de vitesse initiale à  $m_1$  et  $m_2$ . La courbe en pointillée sur les deux courbes du bas correspond à l'enveloppe des battements.

On reste dans le cas symétrique et de plus en configuration de faible couplage  $K \ll k_0$ . Les fréquences  $f_r$  et  $f_l$  des deux modes sont alors très proches et on peut observer des *battements*. En effet, comme nous l'avons vu lors de l'étude du régime transitoire de l'oscillateur amorti (cf p33), la somme des deux cosinus dans l'eq. 3.4 peut être réécrite via un peu de trigonométrie pour faire apparaître des battements avec comme fréquences  $(\omega_l + \omega_r)/2$  et  $(\omega_r - \omega_l)/2$ . Ces battements sont visibles sur les amplitudes de  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  dans le bas de la

7. Si le système n'est pas symétrique le transfert d'énergie entre les deux oscillateurs n'est pas total.

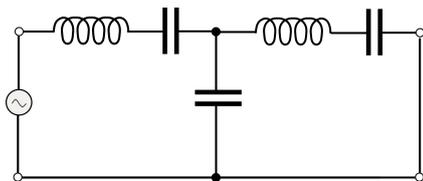


FIGURE 3.5: Exemple simple d'oscillateurs couplés électriques : couplage capacitif (élastique).

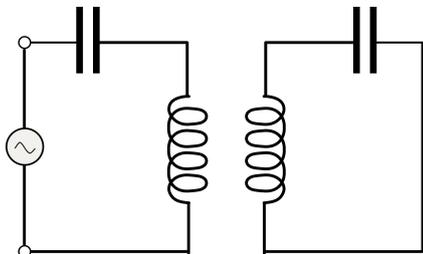


FIGURE 3.6: Exemple simple d'oscillateurs couplés électriques : couplage inductif (masse/cinétique).

8. Une autre méthode consistant à chercher les coordonnées normales (c'est à dire systématiser les combinaisons linéaires à effectuer entre les équations pour les découpler) est donnée en annexe A.

figure 3.4.

Connaissant  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$ , l'énergie cinétique du système ainsi que l'énergie élastique stockée dans les ressorts sont faciles à calculer. Il faut néanmoins ne pas oublier l'énergie élastique stockée dans le ressort de couplage  $E_{p\ Couplage} = 1/2K(x_1 - x_2)^2$ .

On peut voir sur la figure 3.4 l'évolution au cours du temps de l'énergie au sein du premier oscillateur, du second, et aussi l'énergie potentielle stockée dans le ressort  $K$  de couplage. L'énergie initialement contenue dans l'oscillateur 1, tout en oscillant entre énergie potentielle et énergie cinétique, est transmise progressivement à l'oscillateur 2 via le couplage. Le système étant symétrique<sup>7</sup> (les deux oscillateurs étant les mêmes) et le couplage faible, on arrive au moment où toute l'énergie de l'oscillateur 1 est passée à l'oscillateur 2 (trait rouge sur la figure). Le système étant limité à deux oscillateurs, l'énergie revient ensuite vers l'oscillateur 1.

### 3.1.2 Équivalent électrocinétique

L'équivalent électrocinétique du système masse-ressort est présenté sur la figure 3.5. Deux oscillateurs LC sont couplés par l'intermédiaire d'un condensateur de couplage.

Nous pouvons obtenir le système de deux équations différentielles gouvernant le système en appliquant l'analogie électromécanique (voir le tableau 2.1) :

$$\begin{aligned} L\ddot{q}_1 &= -1/Cx_1 + 1/C_c(q_2 - q_1) \\ L\ddot{q}_2 &= -1/Cx_2 + 1/C_c(q_1 - q_2) \end{aligned} \tag{3.5}$$

et toutes les conclusions que nous avons obtenues au paragraphe précédent sont applicables directement à ce montage électrique.

Le couplage montré sur la figure 3.6 est peut-être plus impressionnant. En effet, le couplage s'effectue par induction entre les deux bobines. Il n'y a pas de câble qui relie les deux montages et pourtant l'énergie se transfère de l'un vers l'autre tout comme avec des pendules. Plus exactement, le montage mécanique équivalent est un pendule accroché à la masse d'un autre pendule (voir exercice A p 191).

### 3.1.3 Méthodes de résolution plus générales

Nous allons maintenant aborder une méthode<sup>8</sup> de résolution du système d'équations différentielles couplées 3.2 en utilisant des outils d'algèbre linéaire.

Ayant maintenant plus d'expérience sur les oscillateurs couplés, nous allons directement rechercher les modes du système. Plus précisément, nous savons qu'il y en a deux car le système a deux degrés de liberté et nous allons voir si nous pouvons les trouver. Peut-être allons nous trouver au contraire qu'ils ne peuvent pas exister ...

Cherchons donc les solutions harmoniques  $x_1(t) = A_1 e^{i\omega t}$  et  $x_2(t) = A_2 e^{i\omega t}$  (même pulsation  $\omega$  qui reste à déterminer mais avec des amplitudes complexes  $A_1$  et  $A_2$  a priori différentes). On prendra ensuite la partie réelle de l'éventuel résultat <sup>9</sup>.

Il est plus pratique d'écrire cela sous forme de vecteur pour commencer à s'entraîner pour le cas à  $N$  dimensions :

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t}$$

Les équations différentielles 3.2 peuvent alors s'écrire :

$$\begin{aligned} -m\omega^2 A_1 &= -kA_1 + K(A_2 - A_1) \\ -m\omega^2 A_2 &= -kA_2 + K(A_1 - A_2) \end{aligned} \quad (3.6)$$

soit :

$$\begin{aligned} -m\omega^2 A_1 + kA_1 + K(A_1 - A_2) &= 0 \\ -m\omega^2 A_2 + kA_2 + K(A_2 - A_1) &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Ce qui peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} -m\omega^2 + k + K & -K \\ -K & -m\omega^2 + k + K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Appelons  $D$  la matrice mise en jeu dans l'équation 3.8 :

$$D = \begin{pmatrix} -m\omega^2 + k + K & -K \\ -K & -m\omega^2 + k + K \end{pmatrix}$$

L'équation 3.6 peut donc s'écrire :

$$D \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Même si cela est tentant, on ne peut simplifier des termes lorsque des matrices sont utilisées dans des équations. Il faut multiplier par des *matrices inverses*, l'équation précédente devient :

$$D^{-1} \left[ D \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \right] = D^{-1} \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \stackrel{?}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et donc comme, par définition d'une matrice inverse,  $DD^{-1}$  est égale à la matrice identité on aboutit à  $(A_1, A_2) = (0, 0)$  qui est une solution assez décevante : les deux masses restent immobiles, il n'y a pas de mouvement...

Cependant, en écrivant  $D^{-1}$  nous avons supposé implicitement que cette matrice existe, ou, dit autrement que  $D$  est inversible, ce qui n'est pas toujours le cas. Il existe donc une solution pour que  $(A_1, A_2) = (0, 0)$  ne soit pas la seule solution : que  $D$  ne soit *pas inversible*.

Mathématiquement, une matrice n'est pas inversible lorsque son *déterminant est nul* <sup>10</sup>.

9. NB : On aurait aussi pu choisir de chercher les solutions sous la forme  $e^{st}$  et trouver que  $s$  est imaginaire.

10. En effet, la matrice inverse est divisée par l'inverse du déterminant. Si ce dernier est nul, la matrice inverse n'existe pas.

L'éventuelle existence de mode à la pulsation  $\omega$ , encore à déterminer, ce résume donc à l'équation :

$$\det D = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -m\omega^2 + k + K & -K \\ -K & -m_2\omega^2 + k + K \end{vmatrix} = 0$$

11. Le déterminant d'une matrice 2x2 vaut :

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

et en développant le déterminant<sup>11</sup> :

$$(-m\omega^2 + k + K)(-m\omega^2 + k + K) - (-K)(-K) = 0$$

et :

$$(-m\omega^2 + k + K) = \pm K$$

et enfin :

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad \text{ou} \quad \frac{k + 2K}{m}$$

Il y a donc 4 solutions pour la pulsation des modes obtenus via l'équation portant sur la nullité du déterminant de la matrice  $D$  :

$$\omega_{l1,l2} = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad \omega_{r1,r2} = \pm \sqrt{\frac{k + 2K}{m}}$$

Nous venons donc de trouver les pulsations propres des modes. Reste à obtenir la "forme" des modes. Pour ce faire, on injecte successivement les pulsations des modes propres que l'on vient juste d'obtenir dans le système d'équation différentielle sous forme matricielle 3.8. Commençons par injecter  $\omega^2 = \frac{k}{m}$  dans l'expression de  $D$  :

$$D = \begin{pmatrix} -m \left( \frac{k}{m} \right) + k + K & -K \\ -K & -m \left( \frac{k}{m} \right) + k + K \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

L'équation matricielle 3.8 est alors :

$$K \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui correspond deux fois<sup>12</sup> à l'équation  $A_1 = A_2$ . Nous retrouvons donc le premier mode : le symétrique.

Si on injecte cette fois  $\omega^2 = \frac{k + 2K}{m}$ , on retrouve le deuxième mode :

$$K \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

car alors on obtient  $A_1 = -A_2$ , le mode antisymétrique.

La solution générale s'écrit alors comme une combinaison linéaire des 4 solutions que nous avons trouvées<sup>13</sup> :

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega_1 t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\omega_1 t} \tag{3.9}$$

$$+ C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\omega_r t} + C_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-i\omega_r t} \tag{3.10}$$

12. C'était quelque part le but d'écrire  $\det M = 0$ . C'est une autre façon d'écrire que l'on ne peut pas résoudre le système de deux équations à deux inconnues, on n'aboutit seulement qu'à une relation entre  $A_1$  et  $A_2$ .

13. A nouveau, les valeurs des pulsations des modes que nous avons trouvées permettent de former via  $e^{i\omega t}$  les *vecteurs propres* de l'espace vectoriel des solutions du système d'équations différentielles couplées qui est ici de dimension 4.

et, comme vu dans les chapitres précédents, la solution réelle permet de revenir à l'écriture amplitude-phase :

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = A_l \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_l t + \Phi_s) + A_r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_r t + \Phi_r) \tag{3.11}$$

Il s'agit donc de l'écriture générale des solutions du système symétrique. Les conditions initiales<sup>14</sup> donnent  $A_l, \Phi_l, A_r$  et  $\Phi_r$ .

*Équation aux valeurs propres* Prenons un peu de recul sur le calcul que nous venons d'effectuer. Nous venons de résoudre une équation qui se met sous la forme :

$$\begin{pmatrix} k + K & -K \\ -K & k + K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = m\omega^2 \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$$

Il s'agit d'une équation aux valeurs propres<sup>15</sup> :

$$MA = m\omega^2 A$$

On appelle *vecteurs propres* l'ensemble des vecteurs particuliers qui une fois multipliés par la matrice  $M$  décrivant le système donnent un multiple d'eux même (ici  $m\omega^2$ ). Les multiples sont appelés *valeurs propres*. Il y a autant de vecteurs propres<sup>16</sup> que la dimensionalité de la matrice  $M$ .

*Résumé de la méthode de découplage*

1. On cherche les modes propres en injectant une solution sous la forme harmonique  $Ae^{i\omega t}$  dans le système.
2. On écrit le système d'équations différentielles couplées sous forme matricielle de la forme<sup>17</sup>  $DA = 0$ .
3. On étudie la condition<sup>18</sup> de nullité du déterminant de la matrice  $D$  ce qui nous donne les pulsations des modes du système.
4. On trouve "la forme" des modes en injectant une à une les pulsations des modes du système dans la matrice  $D$ .
5. La solution générale est alors une combinaison linéaire des modes propres.

Le cas non symétrique sera vu en TD (cf ex 3.3 et 3.3), la méthode est *exactement* la même, seuls les calculs sont un peu plus lourds.

### 3.2 Système masse-ressort symétrique en régime forcé

Le système, qui a maintenant plusieurs degrés de liberté, est mis en vibration à la fréquence  $\omega$  par un opérateur externe. Comment le système va-t-il réagir? La réponse est toujours la même : le système est *linéaire* donc il finira par osciller à la pulsation  $\omega$ . *Tous les degrés de liberté* vont vibrer à la pulsation  $\omega$ , par contre l'amplitude de vibration de chaque degré de liberté et son déphasage par rapport à

14. Par exemple, les deux positions initiales et les deux vitesses initiales.

15. Les équations aux valeurs propres sont très souvent utilisées en mécanique quantique, en particulier pour trouver les valeurs propres de l'Hamiltonien qui sont les énergies que peut prendre le système et ses vecteurs propres qui sont les fonctions propres qui servent de base pour décrire l'évolution temporelle du système.

Plus précisément, pour un opérateur  $G$ , lorsque l'on mesure sa grandeur, on ne peut obtenir que l'une des valeurs propres  $g_k$  (d'où la notion de quantification) d'autre part, si on mesure  $g_k$ , on sait que le système juste après la mesure est dans la fonction propre (vecteur propre) associé à la valeur propre  $g_k$ .

16. Les vecteurs propres sont particuliers car pour un vecteur quelconque la matrice  $A$  pour action "d'étirer" et de "mettre en rotation" le vecteur. Les vecteurs propres ne sont jamais mis en rotation.

17. Alternativement on peut écrire l'équation sous la forme d'une équation aux valeurs propres  $MA = m\omega^2 A$ .

18. Alternativement, on diagonalise la matrice  $M$  afin de trouver ses valeurs propres qui sont les modes du systèmes.

l'excitation seront différents et dépendront de la pulsation excitatrice  $\omega$ .

### 3.2.1 Cas symétrique

Afin de bien mettre en avant la physique du système, nous partons du cas symétrique où nous réintroduisons des forces de frottements fluides en  $-\alpha v$  (par exemple les frottements de l'air). De plus, la masse  $m_1$  est mise en vibration forcée à la pulsation  $\omega$  alors que la masse  $m_2$  est laissée libre.

19. Attention, même si les calculs sont assez proches de l'étude du régime libre, la physique est très différente. Lors du régime libre, on injecte une solution sous la forme harmonique pour trouver les fréquences que pourrait prendre cette évolution harmonique (ce que l'on a appelé mode). Ici, on sait que l'évolution sera harmonique et ce n'est même pas la peine de chercher à quelle pulsation : c'est à la même pulsation  $\omega$  que l'excitation.

On cherche des solutions sous la forme harmonique<sup>19</sup> et à la même pulsation  $\omega$  que celle excitatrice.

$$\begin{aligned} x_1(t) &= X_1 \cos(\omega t + \phi_1) = \text{Re} \left[ \underline{X_1} e^{i\omega t} \right] \\ x_2(t) &= X_2 \cos(\omega t + \phi_2) = \text{Re} \left[ \underline{X_2} e^{i\omega t} \right] \end{aligned} \tag{3.12}$$

Ce qui donne une fois injecté dans le système d'équation différentielle et simplification par  $e^{i\omega t}$  :

$$\begin{aligned} -\omega^2 m \underline{X_1} + i\omega \alpha \underline{X_1} + k \underline{X_1} + K(\underline{X_1} - \underline{X_2}) &= F_0 \\ -\omega^2 m \underline{X_2} + i\omega \alpha \underline{X_2} + k \underline{X_2} + K(\underline{X_2} - \underline{X_1}) &= 0 \end{aligned} \tag{3.13}$$

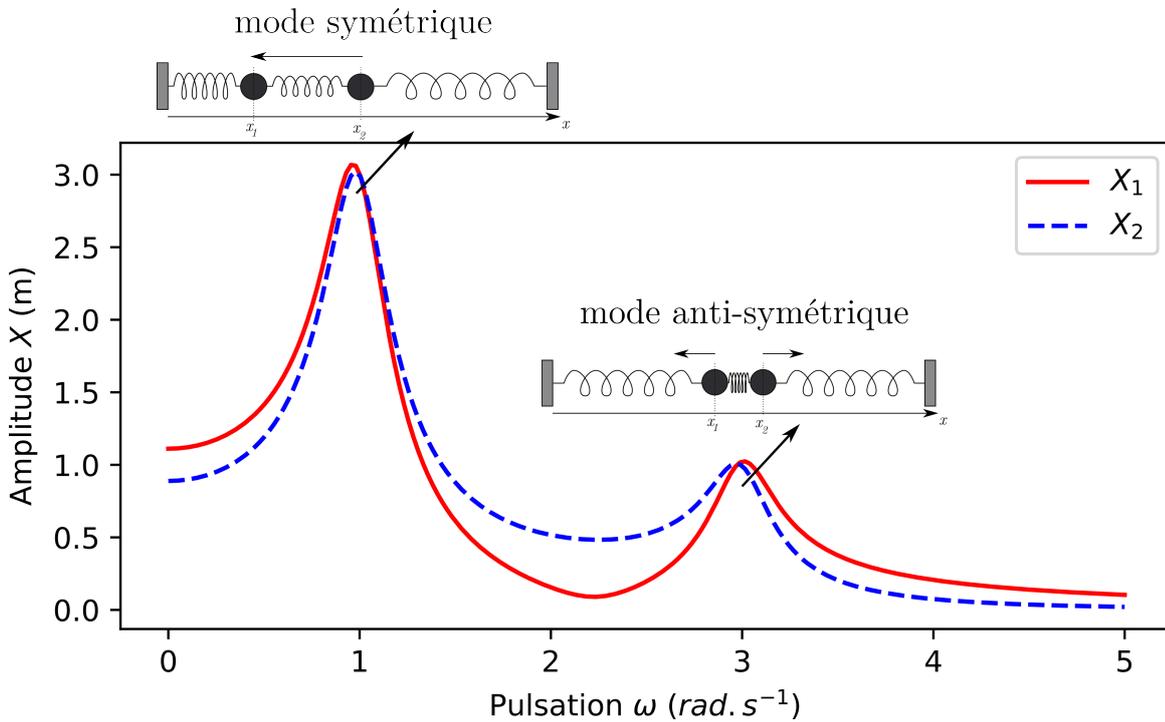


FIGURE 3.7: Courbe de résonance en amplitude pour deux oscillateurs couplés et symétriques avec  $Q = 3$ ,  $\omega_l = 1 \text{ rad s}^{-1}$  et  $\omega_r = 3 \text{ rad s}^{-1}$ . Plus le facteur de qualité  $Q$  augmente et plus les deux oscillateurs ont le même comportement. On remarque au passage l'apparition d'une anti-résonance pour une pulsation environ égale à  $2.2 \text{ rad s}^{-1}$ .

La méthode de résolution la plus directe consiste à obtenir  $\underline{X_2}$  dans la première équation et l'injecter dans la seconde (c'est à dire résoudre le système de deux équations à deux inconnues cf exercice 3.3). Exploitions la symétrie du système et utilisons plutôt les coordonnées normales de ce système symétrique, à savoir  $\underline{U} = \underline{X_1} + \underline{X_2}$

et  $\underline{V} = \underline{X}_1 - \underline{X}_2$  :

$$-\omega^2 m \underline{U} - i\omega \alpha \underline{U} + k \underline{U} = F_0$$

et

$$-\omega^2 m \underline{V} - i\omega \alpha \underline{V} + (k + 2K) \underline{V} = F_0$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} -\omega^2 \underline{U} + i\frac{\omega}{\tau} \underline{U} + \omega_l^2 \underline{U} &= F_0/m \\ -\omega^2 \underline{V} + i\frac{\omega}{\tau} \underline{V} + \omega_r^2 \underline{V} &= F_0/m \end{aligned} \quad (3.14)$$

On voit donc que tout se passe comme si chaque mode se comportait comme un oscillateur forcé. Il n'y a plus qu'à appliquer les résultats du chapitre 2 (voir section 2.3.1 p29). Par exemple pour  $x_1$ , en régime permanent on obtient :

$$x_1(t) = \frac{u+v}{2} = 1/2 [A_u \cos(\omega t + \Phi_u) + A_v \cos(\omega t + \Phi_v)]$$

avec :

$$A_u = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_l^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}}} \quad \text{et} \quad \tan \Phi_u = \frac{-\omega/\tau}{\omega_l^2 - \omega^2}$$

et

$$A_v = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_r^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}}} \quad \text{et} \quad \tan \Phi_v = \frac{-\omega/\tau}{\omega_r^2 - \omega^2}$$

L'évolution de l'amplitude<sup>20</sup> est représentée sur la figure 3.7. On note au passage l'apparition d'une "anti-résonance" pour la masse  $m_1$  pour une pulsation environ égale à  $2.2 \text{ rad s}^{-1}$ . Lorsque la pulsation excitatrice  $\omega$  est proche de  $\omega_l$ , non seulement les amplitudes de  $m_1$  et  $m_2$  sont importantes mais le système se trouve alors dans le mode symétrique (cf fig 3.2) et les masses oscillent en phase. De même, pour une pulsation excitatrice  $\omega$  proche de  $\omega_r$ , le système est dans le mode anti-symétrique et les masses oscillent en opposition de phase (cf fig 3.3)

Nous pouvons donc en conclure que :

#### Résonance oscillateurs couplés

La résonance force le système à être dans le mode dont la pulsation est proche de la pulsation excitatrice.

### 3.2.2 Cas général

Étudions maintenant le cas général. Le formalisme matriciel utilisé dans la section précédente va pouvoir être réutilisé ici. Dans le cas le plus général, les équations du mouvement s'écrivent :

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + \alpha_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 + K(x_1 - x_2) &= F_1 \cos(\omega t) \\ m_2 \ddot{x}_2 + \alpha_2 \dot{x}_2 + k_2 x_2 + K(x_2 - x_1) &= F_2 \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (3.15)$$

20. Ce n'est pas la peine de prendre en compte le déphasage si les deux résonances sont distantes (si  $\omega_r \gtrsim 5\omega_l$ ) car alors lorsque le terme issu de  $v$  est grand celui en  $u$  est petit et inversement. En d'autres termes,  $|u+v| \approx |u| + |v|$

On cherche<sup>21</sup> des solutions sous la forme harmonique et à la même pulsation que celle excitatrice. Ce qui peut s'écrire sous forme matricielle :

$$Z(t) = \begin{pmatrix} \underline{A}_1 \\ \underline{A}_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t} = \underline{A} e^{i\omega t}$$

Une fois injecté dans le système d'équations différentielles 3.17, nous obtenons :

$$-\omega^2 M \underline{A} - i \Lambda \underline{A} + K \underline{A} = F_0 \quad (3.16)$$

où :

$$M = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} k_1 - K & -K \\ -K & k_2 - K \end{pmatrix} \quad F_0 = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

ce qui peut se réécrire<sup>22</sup> :

$$\left[ -\omega^2 \mathcal{I} - i\Gamma + M^{-1}K \right] \underline{A} = M^{-1}F_0$$

Ce qui se résout formellement via :

$$\underline{A} = \left[ -\omega^2 \mathcal{I} - i\Gamma + M^{-1}K \right]^{-1} M^{-1}F_0 \quad (3.17)$$

où  $\mathcal{I}$  est la matrice identité.

Lorsque le frottement fluide est le même pour tous les degrés de liberté (ce qui est un cas très fréquent), on peut montrer que tout se passe comme si chaque mode était similaire à un oscillateur harmonique amorti à une dimension. (cf Annexe A section A)

L'équation 3.17 donne donc la solution générale du mouvement forcé du système en régime permanent. C'est cette méthode que l'on utiliserait pour une *détermination numérique*<sup>23</sup> de l'évolution du système. En pratique, à deux degrés de liberté, il est souvent moins calculatoire d'écrire le système d'équation différentielle du système et de résoudre le système de deux équations (une par degré de liberté) à deux inconnues ( $\underline{A}_1$  et  $\underline{A}_2$ ) (cf exercice 3.3)

22. Avec

$$\Gamma = M^{-1}\Lambda$$

23. Ou aussi une détermination analytique en utilisant des outils comme Mathematica ou SymPy

3.3 TD 3

Questions de cours

1. Donner l'équation différentielle gouvernant le comportement de deux oscillateurs symétriques couplés.
2. Qu'est-ce qu'un mode propre d'un système oscillant ?
3. Comment évolue l'énergie au sein du système entre les deux oscillateurs ?
4. Qu'est-ce qu'une équation aux valeurs propres ? En quoi cela est pertinent pour l'analyse des modes propres d'un système oscillant ?
5. Quelle est l'écriture générale de l'évolution, en régime libre, de deux oscillateurs couplés ?
6. Même question en régime forcé une fois atteint le régime permanent.
7. Que se passe-t-il avant d'atteindre le régime permanent ?
8. A quelle pulsation évolue la masse 1 en régime forcé à la pulsation  $\omega$  ? Et la masse 2 ?
9. Quel montage électronique correspond au couplage de deux masses par un ressort ?
10. Qu'est-ce qu'une anti-résonance ?

Pendule de torsion non-symétrique en régime libre

On considère deux pendules de torsion couplés qui seront étudiés en TP.

*Cas symétrique* Dans un premier temps, on considère le système parfaitement symétrique. Les deux pendules de même moment d'inertie  $J$  et de couple de rappel  $c$ , sont couplés par un fil de torsion de couple de rappel  $C'$ .

1. En appliquant le théorème du moment cinétique<sup>24</sup> au système, donner les deux équations différentielles couplées gouvernant le système.
2. En appliquant la méthode de la section 3.1.3 (écriture matricielle et résolution du système d'équation linéaire), trouver la pulsation et la forme des modes propres du système.
3. Montrer qu'en cas de couplage faible ( $C' \ll C$ ), le mouvement des pendules sont des battements dont la pulsation de l'enveloppe est  $(\omega_{\text{anti}} - \omega_{\text{sym}})/2$  et de pulsation interne  $(\omega_{\text{anti}} + \omega_{\text{sym}})/2$ . Montrer que la pulsation de l'enveloppe s'approche, dans le cas d'un couplage faible, par  $\omega_0 K$  avec  $\omega_0 = (C + C')/J$  et  $K = C/(C' + C)$  est le coefficient de couplage. Montrer aussi que la pulsation interne s'approche par  $2\omega_0$

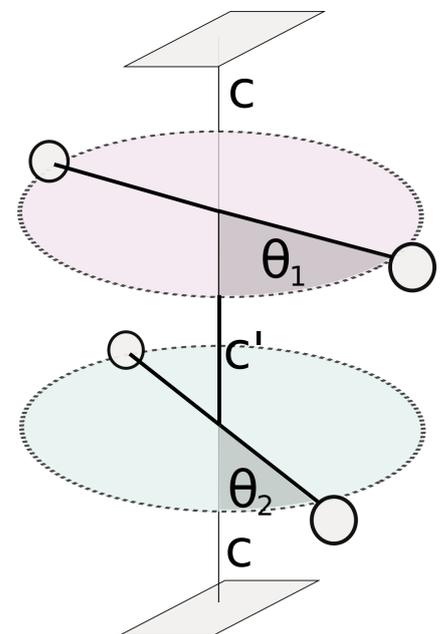


FIGURE 3.8: Schéma du pendule de torsion (cf ex 3.3)

24. Rappel : Le moment cinétique d'un solide autour d'un axe et  $L = J\dot{\theta}e_{\Delta}$ , où  $\theta$  polaire dont l'axe de rotation est l'axe  $z$ , cet axe étant porté par le vecteur  $e_{\Delta}$ .

D'autre part, le moment de la force de rappel du fil de torsion est  $-C\theta e_z$

*Cas non symétrique* Le montage n'est pas parfaitement réglé. Les deux pendules ont toujours le même moment d'inertie  $J$ , mais ils ont maintenant des couples de rappel différents notés  $c$  et  $c + \Delta c$ . Le fil de torsion de couplage reste inchangé.

1. Donner les nouvelles pulsations des modes du système.
2. Donner les nouveaux modes propres.

On a alors :  $J = 1 \text{ kg m}^2$ ,  $c = 1 \text{ N m}^{-1}$ ,  $C' = 0.2 \text{ N m}^{-1}$  et  $\Delta c = 0.1 \text{ N m}^{-1}$ . De plus,  $\theta_1(t = 0) = \theta_0 = 1 \text{ rad}$  et  $\theta_2(t = 0) = \dot{\theta}_1(t = 0) = \dot{\theta}_2(t = 0) = 0$ .

1. Donner les valeurs numériques des pulsations des modes.
2. Donner l'expression de  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$ .

*Circuits LC couplés par une capacité*

On considère le montage présenté sur la figure 3.9 où on repère deux oscillateurs LC (équivalent à un masse-ressort) couplés par une capacité  $C'$ . Soit  $q_1$  et  $q_2$  le nombre de charge dans le condensateur du LC numéro 1 (resp. 2).

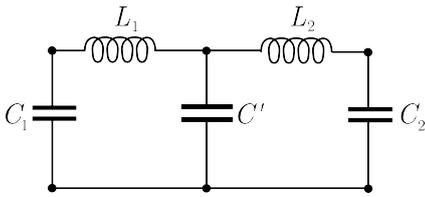


FIGURE 3.9: Deux circuits LC couplés par une capacité  $C'$  (cf ex A)

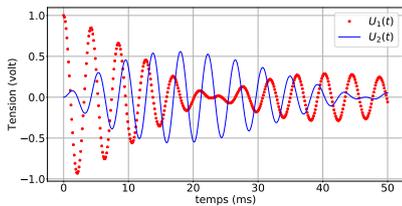


FIGURE 3.10: Oscillogrammes des tensions  $U_1$  et  $U_2$  aux bornes des condensateurs 1 et 2 respectivement

1. Écrire les deux équations différentielles couplées portant sur  $q_1$  et  $q_2$
- 2.(a) On considère dans un premier temps le cas symétrique,  $C_1 = C_2 = C$  et  $L_1 = L_2 = L$ 
  - (b) Résoudre le système d'équation différentielle en exploitant le fait que le système est symétrique.
  - (c) Donner la pulsation et la forme des deux modes.
  - (d) La figure 3.10 montre l'évolution de la tension aux bornes du condensateur 1. A partir de ce graphe, sachant que  $L = 10 \text{ mH}$ , retrouver la valeur de  $C$  et  $C'$ .
  - (e) Pourquoi les oscillations présentées sur la figure 3.10 sont-elles amorties ?

- (f) Comment la tension montrée sur la figure 3.10 évolue-t-elle si
  - $C' = 0$  (on l'enlève du circuit) ?
  - on augmente  $C'$  ?
  - on diminue  $C'$  ?

3. On considère maintenant le cas général.

- (a) Trouver la pulsation et la forme des deux modes du système en appliquant la méthode de découplage vue dans le cours (cf section 3.1.3)
- (b) Donner la pulsation et la forme des deux modes.

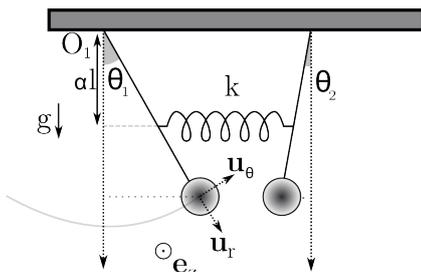


FIGURE 3.11: Schéma de deux pendules couplés. Ils seront aussi étudiés en TP.

*Pendules symétriques couplés par un ressort*

Deux pendules simples avec la même longueur de fil  $l$ , sont couplés par un ressort de constante de raideur  $k$  (voir fig 3.3 et TP). Lorsque les pendules sont à l'équilibre, le ressort est attaché au fil du pendule à la hauteur  $\alpha l$  ( $0 < \alpha < 1$ ).

On supposera les oscillations assez petites pour que la tension du ressort soit toujours considérée horizontale.

Afin d'obtenir les équations différentielles du mouvement et puisque le système met en jeu des rotations autour d'un axe, nous allons utiliser le Théorème du Moment Cinétique (TMC) et au vue des symétries du problème, nous allons aussi utiliser un système de coordonnées polaires.

1. Donner l'expression du moment cinétique du pendule 1 par rapport au point d'attache  $O_1$  du pendule 1  $L_{O_1}$ .
2. Donner l'expression du moment par rapport à  $O_1$ <sup>25</sup> de la force :
  - de gravité
  - de tension de la corde du pendule 1
  - de la force de rappel du ressort.
3. Obtenir les équations différentielles couplées du mouvement via le TMC
4. Linéariser l'équation dans le cas des petits angles.
5. Découpler et résoudre ces équations différentielles en exploitant le fait que le système est symétrique.
6. Comment évolue la pulsation du mode antisymétrique en fonction de la position d'accroche du ressort de couplage  $\alpha l$ ?
7. Soient les conditions initiales suivantes :  $\theta_1(t = 0) = \theta_0$ ,  $\theta_2(t = 0) = 0$ ,  $\dot{\theta}_1(t = 0) = 0$ ,  $\dot{\theta}_2(t = 0) = 0$ , donner l'évolution de deux pendules  $\theta_1(t)$  et  $\theta_2(t)$

25.  $M_{O_1} = O_1 M \wedge F$

*Le double pendule*

Soit le double pendule schématisé sur la figure 3.12.

Ce montage, qui peut sembler un peu stupide de prime abord, a pourtant de nombreuses applications : il sert de filtre passe-haut pour les vibrations<sup>26</sup>. Ce système est aussi un des exemples les plus emblématiques d'apparition du *chaos*, en effet, si on ne se limite pas à l'approximation des petits angles, le mouvement du double pendule n'est plus prévisible<sup>27</sup>.

Nous allons ici simplement trouver les modes de ce système qui est fortement contre-intuitif.

1. Écrire les coordonnées  $x_1$  et  $y_1$  de la masse 1 en fonction de  $\theta_1$  et  $\theta_2$ . Faire de même avec  $x_2$  et  $y_2$  pour la masse 2.
2. Simplifier les expressions dans le cas des petits angles.

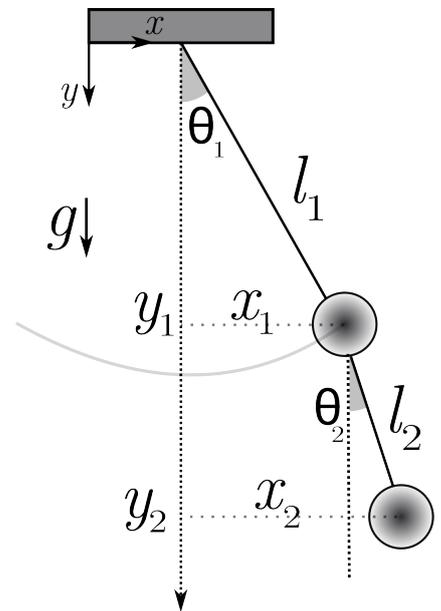


FIGURE 3.12: Schéma de deux pendules couplés. Ils seront aussi étudiés en TP.

26. Un tel système équipe les miroirs de l'interféromètre gravitationnel géant VIRGO afin d'atténuer les vibrations dues à l'environnement.

27. Plus exactement, il dépend de façon tellement colossale des conditions initiales que l'on ne peut pas prévoir son évolution au temps long

3. Écrire le PFD pour la masse  $m_1$  et la masse  $m_2$ . A nouveau, simplifier les expressions dans le cas des petits angles.
4. Arranger le système d'équations couplées de telle sorte à faire disparaître les tensions  $T_1$  et  $T_2$  des cordes. Montrer que le système d'équations différentielles couplées peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + 3\omega_0^2 x_1 - \omega_0^2 x_2 &= 0 \\ \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 - \omega_0^2 x_1 &= 0 \end{aligned}$$

avec  $\omega_0 = \sqrt{g/L}$ .

5. Trouver la pulsation et la forme des deux modes du système en appliquant la méthode de découplage vue dans le cours (cf section 3.1.3).
6. Schématiser sur un dessin la forme des deux modes.

*Oscillateurs harmoniques couplés - cas général*

Montrer dans le cas général d'un système masse-ressort avec :

- un premier oscillateur de masse  $m_1$  et de ressort  $k_1$
  - un deuxième oscillateur de masse  $m_2$  et de ressort  $k_2$
  - un ressort de couplage de constante de raideur  $K$ ,
- que les pulsations des modes propres sont :

$$\omega_{1,2}^2 = \pm \frac{1}{2}(-B + \sqrt{B^2 - 4C})$$

avec <sup>28</sup>

28. On considère que  $B^2 - 4C > 0$

$$B = -\left(\frac{k_1 + K}{m_1} + \frac{k_2 + K}{m_2}\right) \quad \text{et} \quad C = \frac{k_1 k_2 + k_2 K + k_1 K}{m_1 m_2}$$

et que les modes propres sont :

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{k_1 + K - m_1 \omega_1^2}{K} = \underbrace{\frac{K}{k_2 + K - m_2 \omega_1^2}}_{\text{aussi}}$$

et

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{k_1 + K - m_1 \omega_2^2}{K} = \underbrace{\frac{K}{k_2 + K - m_2 \omega_2^2}}_{\text{aussi}}$$

Donner alors la forme générale de  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$ .

Exemple d'application : On suppose que  $m_2 = 2m_1 = 2\text{ kg}$ ,  $k_2 = 2k_1 = 2\text{ N m}^{-1}$ ,  $K = 0.5\text{ N m}^{-1}$ . De plus les conditions initiales sont  $x_1(t=0) = x_0 = 1\text{ m}$ ,  $x_2(t=0) = \dot{x}_1(t=0) = \dot{x}_2(t=0) = 0$

1. Donner la valeur numérique de  $\omega_1$  et  $\omega_2$
2. Donner l'expression de  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  compte tenu des conditions initiales.

Attention : c'est assez calculatoire ! Il ne faut pas chercher à développer les expressions les termes ne vont pas se simplifier comme dans le cas symétrique.

### Prise en compte des frottements

On considère à nouveau le système de masse-ressort couplés (cf fig. 3.1), mais on prend maintenant en compte un frottement fluide de coefficient  $\alpha$  comme par exemple tout simplement les frottements de l'air. Par souci de simplicité, on considérera le cas symétrique.

1. Établir le système d'équations différentielles couplées.
2. Montrer que les modes propres du système se comportent comme des oscillateurs harmoniques dont on donnera la pulsation  $\Omega$  et le temps d'amortissement  $\tau$ .

### Oscillateur en régime forcé sans frottement

Nous nous plaçons ici dans le cas où nous pouvons négliger les frottements fluides. C'est une situation peu physique mais qui simplifie grandement les calculs.

Soit donc le sempiternel système masse-ressort décrit sur la figure 3.1 pris dans le cas général, c'est à dire avec une masse  $m_1$  associée un ressort de constante de raideur  $k_1$  et une masse  $m_2$  associée un ressort de constante de raideur  $k_2$ , les deux étant couplés par un ressort de constante de raideur  $K$ . Le système est mis en oscillation via la masse 1 avec une force  $F_1 \cos \omega t$ .

1. Donner le système d'équations différentielles couplées gouvernant le système.
2. Donner l'expression de l'amplitude complexe de vibration de l'oscillateur 1  $\underline{X}_1$  et de l'oscillateur 2  $\underline{X}_2$ .
3. On supprime maintenant le ressort de raideur  $k_2$ . Trouver la pulsation  $\omega_e$  appelée pulsation d'étouffement pour laquelle la vibration de  $X_1$  est nulle.

### Étouffement de la vibration

Soit le système décrit sur la figure 3.13. Le solide  $S_1$  de masse  $m_1$  est soumis à une force supplémentaire de norme  $F(t) = F_m \cos \omega t$  selon la verticale descendante.

Montrer que l'association de l'oscillateur 2, de masse  $m_2$  réglable, et de l'oscillateur principal permet d'obtenir un régime forcé stationnaire où la vitesse de  $S_1$  est négligeable.

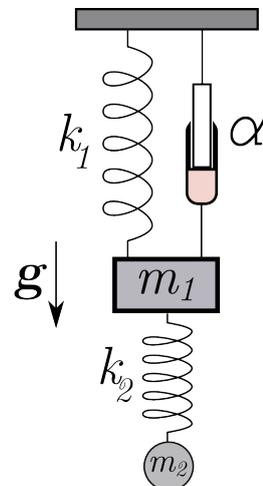


FIGURE 3.13: Étouffeur de vibration (cf 3.3)

### 3.4 CQFR

#### *Connaissances*

1. Il y a autant d'équations différentielles qui gouvernent le système que de degrés de liberté
2. Tout mouvement oscillant, aussi complexe soit-il, peut se décomposer comme une superposition de mouvements harmoniques.
3. Les mouvements harmoniques servant de base de décomposition aux mouvements du système sont appelés modes.
4. Un mode est caractérisé par une pulsation et une "forme", c'est à dire, une relation d'amplitude d'oscillation entre les différents degrés de liberté du système.
5. L'énergie, en plus d'osciller sous forme cinétique et potentielle au sein d'un oscillateur, est transmise d'un oscillateur vers l'autre.
6. Connaitre les équivalents électrocinétiques des oscillateurs mécaniques.
7. En régime forcé, tout se passe comme si chaque mode se comportait comme un oscillateur forcé indépendant. Les fréquences de résonances du système sont donc très proches des fréquences des modes.
8. La résonance force le système à être dans le mode dont la pulsation est proche de la pulsation excitatrice.

#### *Savoir-faire*

1. Savoir établir les deux équations différentielles couplées gouvernant l'évolution du système.
2. Savoir résoudre ce système d'équations rapidement dans le cas du système symétrique.
3. Pouvoir résoudre le système d'équations couplées dans le cas général en faisant appel à l'algèbre linéaire.
4. Pouvoir trouver les amplitudes et les déphasages des deux masses en régime forcé, une fois le régime permanent atteint.



## 4 Du couplage vers la propagation

L'ÉTUDE DE DEUX OSCILLATEURS COUPLÉS nous a permis de sentir les prémices de la propagation. L'énergie du premier oscillateur passe de manière réversible vers le second et revient au premier. Il ne reste plus qu'à allonger la chaîne pour voir l'énergie, et l'information associée, se propager d'un bout à l'autre de la chaîne. Nous allons donc commencer par regarder le cas de  $N$  oscillateurs identiques.

Nous pourrions aussi nous intéresser au cas de  $N$  oscillateurs quelconques<sup>1</sup>. Cela reviendrait principalement à étendre la démarche étudiée au chapitre précédent de 2 à  $N$  degrés de liberté. Le système, aussi complexe soit-il, pourrait alors être décrit par  $N$  modes possédant chacun leur pulsation et leur forme. Nous n'allons pas aller dans cette direction car cela nous éloignerait de l'étude des ondes. En effet, les ondes mettent en jeu nécessairement des systèmes *symétriques*. De plus, l'étude de  $N$  degrés de liberté quelconques demande l'utilisation de l'approche lagrangienne de la mécanique pour aboutir efficacement aux équations différentielles du système. Enfin, dès 5-6 degrés de liberté il faut avoir recours à des résolutions numériques tellement les expressions analytiques deviennent ingérables.

Nous allons donc dans ce chapitre charnière passer du côté vibration du cours vers le côté onde. Le point de transition sera l'obtention de l'équation d'onde de d'Alembert lorsque nous ferons tendre le nombre d'oscillateur  $N$  vers l'infini.

### Sommaire

4.1	N osc. couplés . . . . .	68
4.2	N inf., eq. Onde. . . . .	72
4.3	TD4 . . . . .	74
4.4	CQFR . . . . .	76

1. Comme par exemple l'étude des vibrations d'un robot où chaque point d'articulation (au niveau des jambes, des bras, du cou, . . .) constitue un degré de liberté

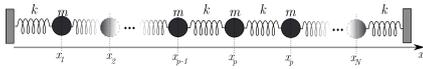


FIGURE 4.1: Schéma d'une chaîne de  $N$  oscillateurs couplés et symétriques

2. "p" pour particule

3. Les autres étant la symétrie et l'invariance temporelle (voir annexe A

### 4.1 Chaîne de $N$ oscillateurs identiques couplés

**Équation différentielle** Nous reprenons le système masse-ressort du chapitre précédent (fig 3.1), mais avec cette fois  $N$  oscillateurs couplés (cf fig 4.1).

La force sur la  $p$ -ème<sup>2</sup> masse s'écrit :

$$F = k(x_{p-1} - x_p) + k(x_{p+1} - x_p) = kx_{p-1} - 2kx_p + kx_{p+1}$$

Nous voyons alors tout de suite que, d'un point de vue de la masse  $p$ , seul compte le comportement de ses voisines  $p - 1$  et  $p + 1$ . On parle d'interaction *locale*. C'est un des ingrédients indispensables pour l'apparition d'une onde<sup>3</sup>.

On se retrouve donc avec  $N$  équations différentielles de la forme :

$$m\ddot{x}_p = kx_{p-1} - 2kx_p + kx_{p+1} \tag{4.1}$$

Ce système est équivalent, mathématiquement, dans le cas des petits déplacements, au cas de billes placées le long d'une corde pouvant entrer en oscillation transversale (cf encart 1). L'avantage de ce second système est que les modes sont plus faciles à visualiser.

**Encart 1 : Système de billes en oscillation transversale le long d'une corde**

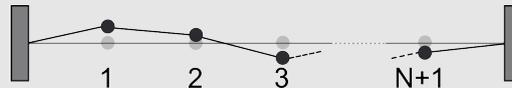


FIGURE 4.2: Chaîne de bille

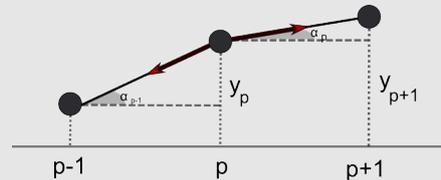


FIGURE 4.3: Forces subies par une bille

Le système est représenté sur la figure 4.2 et 4.3.

On considère le fil inextensible, par conséquent la composante horizontale du fil est constante. Seule la composante verticale peut évoluer dans le temps (selon la direction  $y$ ). Le PFD appliqué à la masse  $p$  donne :

$$m\ddot{y}_p = -T \sin \alpha_{p-1} + T \sin \alpha_p$$

et dans l'approximation des petites vibrations :

$$m\ddot{y}_p = -T \frac{y_p - y_{p-1}}{l} + T \frac{y_{p+1} - y_p}{l}$$

Ce qui revient à l'équation 4.1 avec  $k \leftrightarrow \frac{T}{l}$ .

<sup>a</sup> Où nous avons utilisé le fait que pour des petits angles  $\sin \alpha \approx \tan \alpha = y/l$

*Résolution* La méthode matricielle exposée au chapitre précédent, bien que lourde, pourrait fonctionner<sup>4</sup>. Ici, on va à nouveau exploiter la symétrie du problème. Cherchons l'éventuelle existence d'un mode<sup>5</sup> du système à une fréquence  $\omega$  encore à déterminer :

$$x_p = A_p e^{i\omega t}$$

Cette expression injectée dans l'équation 4.1 donne :

$$-m\omega^2 A_p = kA_{p-1} - 2kA_p + kA_{p+1}$$

Ce qui peut se réécrire :

$$\frac{A_{p-1} + A_{p+1}}{A_p} = \frac{2\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2} \quad (4.2)$$

Nous avons alors  $N$  équations de ce type. Mais le membre de droite  $(2\omega_0^2 - \omega^2)/\omega_0^2$  ne dépend pas de  $p$ , par conséquent le membre de gauche  $(A_{p-1} + A_{p+1})/A_p$  ne dépend pas non plus de  $p$ . Il nous reste donc à trouver la forme générale de la corde pour laquelle  $(A_{p-1} + A_{p+1})/A_p$  ne dépend pas de  $p$ . Dit autrement, si on connaît 3 coefficients  $A$  adjacents, on remonte les équations 4.2 une à une par récurrence.

L'expression 4.2 contient donc toute l'information pour aboutir aux modes possibles dans le système (pulsation et forme). Cependant, les calculs, qui mettent en jeu des fonctions trigonométriques, sont un peu fastidieux et surtout n'apportent rien sur la compréhension du système, ils sont donc reportés dans l'annexe A.

On obtient alors pour la forme des modes, et plus précisément pour l'amplitude  $A_{p,n}$  de la masse  $p$  pour le mode  $n$  :

$$A_{p,n} = c_n \sin\left(\frac{pn\pi}{N+1}\right) \quad (4.3)$$

où  $c_n$  est le coefficient affecté au mode  $n$  (c'est-à-dire le même rôle que  $A_l$  ou  $A_r$  dans l'équation 3.11).

Pour la pulsation du mode  $n$  :

$$\omega_n = 2\omega_0 \sin\left(\frac{n\pi}{2(N+1)}\right) \quad (4.4)$$

Et finalement pour le mouvement harmonique<sup>6</sup> de la masse  $p$  lorsqu'elle est dans le mode  $n$  :

$$y_{p,n} = A_{p,n} \cos \omega_n t \quad (4.5)$$

Ainsi un mouvement quelconque de la masse  $p$  peut s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire des modes :

$$y_p = C_n \sum_{n=1}^N y_{p,n}$$

où les  $C_n$  sont déterminés par les conditions initiales.

- 4. Le cas  $N = 3$  est l'objet de l'exercice 4.3
- 5. C'est à dire un mouvement harmonique constituant un des éléments pouvant servir de base sur laquelle peut se développer n'importe quelle oscillation du système.

6. Comme nous ne prenons pas en compte les éventuelles forces de frottement fluide, il n'y a de déphasage possible entre les masses. Tout au plus, elle peuvent être en opposition de phase ce qui se traduit par un signe moins sur l'amplitude.

Oscillations de  $N$  oscillateurs couplés

En résumé, les oscillations  $y(p)$  quelconques d'une masse numéro  $p$  comprise dans une chaîne de  $N$  oscillateurs couplés peuvent être vues comme la combinaison linéaire de  $N$  modes dont le mouvement est harmonique à la pulsation  $\omega_n$ , ce qui s'écrit :

$$y_p = \sum_{n=1}^N y_{p,n} = \sum_{n=1}^N A_{p,n} \cos \omega_n t \quad (4.6)$$

avec

$$A_{p,n} = c_n \sin\left(\frac{pn\pi}{N+1}\right) \quad \text{et} \quad \omega_n = 2\omega_0 \sin\left(\frac{n\pi}{2(N+1)}\right) \quad (4.7)$$

Évolution de la forme des modes en fonction du nombre d'oscillateurs couplés. La forme des modes, qui est mathématiquement décrite par l'équation 4.3 est présentée sur la figure 4.4.

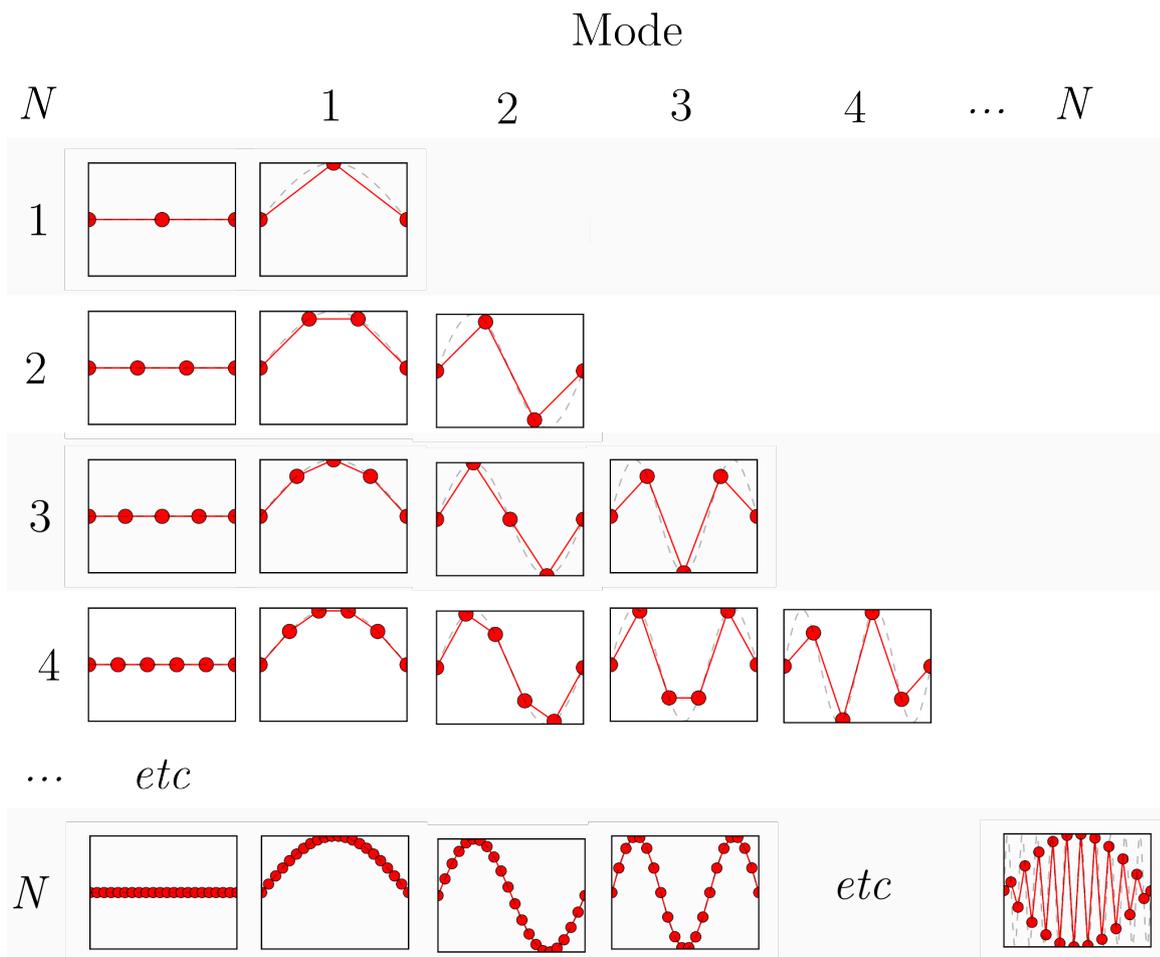


FIGURE 4.4: Évolution de la forme des modes en fonction du nombre d'oscillateurs couplés  $N$ . Les points aux extrémités de la chaîne sont fixes.

Le cas  $N = 1$  ne présente pas beaucoup d'intérêt. Il n'y a qu'un seul oscillateur qui a un mouvement harmonique à la pulsation  $\omega_{N=1} =$

$2\omega_0 \sin(\pi/6) = \omega_0$ . On retrouve le résultat principal du chapitre 3.

Intéressons-nous maintenant au cas  $N = 2$  et vérifions que nous retrouvons les résultats du chapitre précédent.

Pour le mode  $n = 1$ , l'amplitude de la masse  $p = 1$  vaut :

$$A_{1,1} = C_1 \sin\left(\frac{\pi}{2+1}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} C_1$$

et celle de la masse  $p = 2$  :

$$A_{2,1} = C_1 \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} C_1$$

On a donc  $A_{1,1} = A_{2,1}$  et nous retrouvons donc bien le mode *symétrique*.

Pour la pulsation propre de ce mode  $n = 1$  :

$$\omega_1 = 2\omega_0 \sin\left(\frac{\pi}{2 \times 3}\right) = \omega_0$$

Maintenant pour le mode  $n = 2$ , l'amplitude de la masse  $p = 1$  vaut :

$$A_{1,2} = C_2 \sin\left(\frac{2\pi}{2+1}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} C_2$$

et pour la masse  $p = 2$  :

$$A_{2,2} = C_2 \sin\left(\frac{2 \times 2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} C_2$$

On a donc  $A_{1,2} = -A_{2,2}$  et nous retrouvons bien le mode *antisymétrique*.

Pour la pulsation propre<sup>7</sup> du mode antisymétrique :

$$\omega_2 = 2\omega_0 \sin\left(\frac{2\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\omega_0$$

Au final, nous retrouvons bien les résultats du chapitre précédent! Les cas<sup>8</sup>  $N = 3$ , puis  $N = 4$  sont montrés sur la figure<sup>9</sup> 4.4.

L'évolution de la pulsation des modes propres  $\omega_n$  est présentée sur la figure 4.5. Cette dernière n'est pas linéaire.

Notons au passage plusieurs points que nous reverrons au chapitre 9 lors de l'étude d'une onde stationnaire le long d'une corde :

- Toutes les particules sont en mouvement dans le mode 1 et reproduisent une demi-période d'une sinusoïde.
- Pour les modes pairs, le point au milieu de la chaîne à  $p = N/2$  est immobile. On parle de point nodal, ou de nœud de vibration.
- Plus le numéro du mode est grand, plus les pentes entre les masses successives sont importantes. Le dernier mode étant une évolution en zig-zag.

7. Nous avons trouvé  $\omega_r = \sqrt{\frac{k+2K}{m}}$  avec ici  $K = k$ .

8. Le calcul de la forme de ces modes fait l'objet de l'exercice 4.3.

9. Vous trouverez sur moodle une animation montrant comment un mouvement quelconque du cas  $N = 5$  se décompose comme le mouvement des 5 modes pondérés par des coefficients  $C_n$

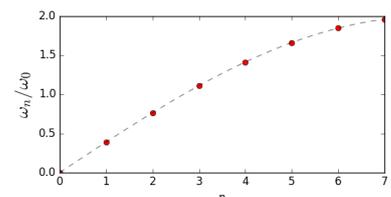


FIGURE 4.5: Évolution de la pulsation des modes propres  $\omega_n$  en fonction du numéro de mode  $n$

### 4.2 N tendant vers l'infini - équation d'onde

On considère maintenant une situation où le nombre d'oscillateur tend vers l'infini, ou, dit autrement le cas où la distance entre deux oscillateurs tend vers zéro. Le système qui était pour l'instant discret devient *continu*.

Pour obtenir la réponse du système, il suffirait a priori de faire tendre N vers l'infini dans les équations précédentes. Nous allons plutôt présenter une méthode plus générale mettant en avant la physique des ondes.

On ne peut plus vraiment parler de la position  $x_p$  de la masse  $p$ , ce concept étant maintenant trop flou. Il faut alors parler d'état de vibration du système à la position  $x$  que nous représenterons par une fonction<sup>10</sup>  $\zeta(x)$ . Nous continuons d'utiliser la notation  $x_p$  mais cela ne représente plus la position des masses mais leur position d'équilibre. Les trois expressions  $\zeta_p, \zeta(x_p), \zeta(x)$ , représentent toutes les trois la même chose : l'écart à l'équilibre de la masse dont la position d'équilibre est  $x_p$ . La fonction  $\zeta$  est aussi une fonction du temps et nous finirons par l'écrire  $\zeta(x, t)$ .

Posons aussi dès maintenant :

$$\Delta x \equiv x_p - x_{p-1}$$

L'équation 4.1 (i.e. le PFD) devient :

$$m\ddot{\zeta}_p = k\zeta_{p-1} - 2k\zeta_p + k\zeta_{p+1} \tag{4.8}$$

$$m\ddot{\zeta}(x_p) = k\zeta(x_{p-1}) - 2k\zeta(x_p) + k\zeta(x_{p+1}) \tag{4.9}$$

$$m\ddot{\zeta}(x) = k\zeta(x - \Delta x) - 2k\zeta(x) + k\zeta(x + \Delta x) \tag{4.10}$$

Dans la dernière équation nous avons enlevé l'indice  $p$ , car l'équation peut s'appliquer n'importe où dans le système tant que la position  $x$  est un multiple  $\Delta x$ . De toute façon nous allons bientôt faire tendre  $\Delta x$  vers zéro ( $\Delta x \rightarrow 0$ ) et l'équation sera valable partout dans le système. Nous obtiendrons alors l'équation d'onde. Revenons pour l'instant à l'équation 4.10 et modifions la progressivement. Commençons par écrire plus lisiblement la dépendance temporelle :

$$m \frac{d^2 \zeta(x)}{dt^2} = k\zeta(x - \Delta x) - 2k\zeta(x) + k\zeta(x + \Delta x) \tag{4.11}$$

Modifions ensuite la dépendance spatiale en vue de faire apparaître des dérivées :

$$m \frac{\partial^2 \zeta(x)}{\partial t^2} = k\Delta x \left[ \frac{\zeta(x + \Delta x) - \zeta(x)}{\Delta x} - \frac{\zeta(x) - \zeta(x - \Delta x)}{\Delta x} \right] \tag{4.12}$$

Nous utilisons des dérivées partielles ( $\partial$ ), car la fonction d'onde  $\zeta$  est fonction à la fois du temps  $t$  et de l'espace  $x$ . Nous pouvons alors réécrire l'équation 4.12 via la définition<sup>11</sup> d'une dérivée :

10. Plus précisément, nous passons d'une description Lagrangienne où on suit la trajectoire d'une seule particule à une description Eulérienne où on étudie le champ  $\zeta(x, t)$  des positions des masses au cours du temps.

11. La définition mathématique de la dérivée  $f'$  au point  $x_0$  d'une fonction  $f$  fonction de la variable  $x$  est par définition :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

En physique, la différence  $x - x_0$ , lorsqu'elle est infinitésimale, s'écrit  $dx$ .

De même, la variation de la fonction  $f$  sur un intervalle infinitésimal, c'est à dire  $f(x) - f(x_0)$  s'écrit  $df$ .

Au total la dérivée de la fonction  $f$  s'écrit bien  $\frac{df}{dx}$ .

Ainsi nous reconnaissons dans l'expression  $\frac{\zeta(x + \Delta x) - \zeta(x)}{\Delta x}$  avec  $\Delta x \rightarrow 0$  la définition de la dérivée de  $\zeta$  mesurée en  $x$  que nous notons :  $\frac{d\zeta}{dx}(x)$ . De même,  $\frac{\zeta(x) - \zeta(x - \Delta x)}{\Delta x}$  est la dérivée de  $\zeta$  mais mesurée en  $x - \Delta x$  que nous notons  $\frac{d\zeta}{dx}(x - \Delta x)$

Pour être plus précis  $\zeta$  est une fonction du temps et de l'espace. De ce fait pour obtenir une petite variation de  $\zeta$ ,  $d\zeta$ , il faut créer une petite variation temporelle  $dt$  et une petite variation spatiale  $dx$  :

$$d\zeta(x, t) = \frac{\partial \zeta}{\partial t} dt + \frac{\partial \zeta}{\partial x} dx$$

la dérivée partielle étant définie par :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x}(t, x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\zeta(x, t) - \zeta(x_0, t)}{x - x_0}$$

D'un point de vue pratique,  $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$  se calcule en dérivant  $\zeta(x, t)$  par rapport à  $t$  sans toucher à la dépendance en  $x$ .

$$m \frac{\partial^2 \zeta(x)}{\partial t^2} = k \Delta x \left[ \frac{\partial \zeta}{\partial x}(x) - \frac{\partial \zeta}{\partial x}(x - \Delta x) \right] \quad (4.13)$$

Puis en divisant une deuxième fois par  $\Delta x$  :

$$\frac{m}{\Delta x} \frac{\partial^2 \zeta(x)}{\partial t^2} = k \Delta x \frac{\frac{\partial \zeta}{\partial x}(x) - \frac{\partial \zeta}{\partial x}(x - \Delta x)}{\Delta x}$$

Nous reconnaissons la dérivée de la dérivée<sup>12</sup> :

$$\frac{m}{\Delta x} \frac{\partial^2 \zeta(x)}{\partial t^2} = (k \Delta x) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$$

En posant la masse linéaire  $\rho = \frac{m}{\Delta x}$  et  $E = k \Delta x$  le module de Young<sup>13</sup> :

$$\rho \frac{\partial^2 \zeta(x, t)}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 \zeta(x, t)}{\partial x^2} \quad (4.14)$$

Et en remarquant que  $c = E/\rho$  a les dimensions d'une vitesse au carré, nous aboutissons<sup>14</sup> à l'équation d'onde de d'Alembert :

Equation d'onde de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 \zeta(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \zeta(x, t)}{\partial x^2} \quad (4.15)$$

Voici donc une équation extrêmement importante de la physique et les chapitres suivants vont porter sur ses solutions : *les ondes*.

Nous pouvons tout de même commencer à faire quelques remarques :

- L'équation différentielle est linéaire.
- L'équation couple le temps et l'espace.
- Comme quasiment toutes les équations<sup>15</sup> de la physique, elle est invariante par inversion du temps.
- Cette équation est tellement importante qu'il existe un opérateur d'alembertien noté  $\square$  et qui vaut ici  $\square \leftrightarrow \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ .
- Ce n'est cependant absolument pas la seule équation d'onde (cf par exemple l'équation de Klein-Gordon dans l'exercice 4.3).

12. Il y a ici une légère ambiguïté, le terme  $\frac{\partial \zeta}{\partial x}(x) - \frac{\partial \zeta}{\partial x}(x - \Delta x)$  devrait être égale à  $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}(x - \Delta x)$  si on se fie à ce que l'on a fait pour passer de l'équation 4.12 à l'équation

4.13. En fait,  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\zeta(x + \Delta x) - \zeta(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\zeta(x) - \zeta(x - \Delta x)}{\Delta x} = \frac{d\zeta}{dx}(x)$ . Dans un cas on approche la limite par la droite et dans l'autre par la gauche. Ce qui est important dans l'équation 4.12 mais pas ici.

13. Le module de Young, souvent noté  $E$  et aussi appelé module d'élasticité peut être vu comme un prolongement de la loi d'Hooke appliquée à une toute petite zone.  $\sigma = E \epsilon$  où  $\sigma$  est la contrainte (en pascal),  $E$  est en unité de pression et  $\epsilon$  est l'allongement relatif. Pour allonger d'un facteur 2 un matériau il faut appliquer une contrainte de  $E$  (la plupart du temps le matériau se casse avant)

14. Voici une autre façon d'obtenir l'équation onde. Appliquons un développement de Taylor à la fonction  $\zeta$ . On a alors (noter le signe moins) :

$$\begin{aligned} \zeta(x - \Delta x) &= \zeta(x) - \Delta x \frac{\partial \zeta(x, t)}{\partial x} \\ &\quad + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 \zeta(x, t)}{\partial x^2} \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \zeta(x + \Delta x) &= \zeta(x) + \Delta x \frac{\partial \zeta(x, t)}{\partial x} \\ &\quad + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 \zeta(x, t)}{\partial x^2} \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

Au premier ordre on peut donc écrire l'équation 4.11 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \zeta(x)}{\partial t^2} &= \omega_0^2 (\zeta(x) - \Delta x \frac{\partial \zeta(x, t)}{\partial x} \\ &\quad + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 \zeta(x, t)}{\partial x^2} - 2\zeta(x) + \zeta(x) \\ &\quad + \Delta x \frac{\partial \zeta(x, t)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 \zeta(x, t)}{\partial x^2}) \end{aligned}$$

et nous retrouvons donc l'équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 \zeta(x)}{\partial t^2} = \omega_0^2 (\Delta k)^2 \frac{\partial^2 \zeta(x, t)}{\partial x^2}$$

15. A l'exception notable des équations de diffusion.

## 4.3 TD4

*Questions de cours*

1. Quelle est l'équation différentielle régissant le mouvement de la  $p$ -ème masse sur une chaîne de  $N$  oscillateurs couplés symétriques ?
2. Pour le même système, quelle est la forme du  $n$ -ième mode et sa pulsation ?
3. Quel est le mouvement total de la masse  $p$  ?
4. Dessiner la forme du premier mode (on prendra par exemple  $N = 6$ ).
5. Dessiner la forme du dernier mode.
6. Passer de l'équation de la question 1, avec  $N$  oscillateurs, au cas continu où  $N \rightarrow \infty$ .
7. Redonner l'équation de d'Alembert.

*Formes des modes pour 3,4 et 5 oscillateurs*

En suivant la démarche présentée dans la section 4.1 p70, retrouver la forme des modes présentés sur la figure 4.4 pour :

1. 3 Oscillateurs ( $N = 3$ )
2. 4 Oscillateurs ( $N = 4$ )
3. 5 Oscillateurs ( $N = 5$ )

*Trois oscillateurs couplés*

Trois masses  $m$  identiques et quatre ressorts de même raideur  $k$  forment une chaîne d'oscillateurs couplés fixée à ses deux extrémités.

1. Écrire l'équation du mouvement de chaque masse (on posera  $\omega_0^2 = 2k/m$ )
2. Rechercher les évolutions harmoniques, sinusoïdales du système. Poser pour cela

$$x_1 = a_1 \exp(i\omega t) \quad x_2 = a_2 \exp(i\omega t) \quad x_3 = a_3 \exp(i\omega t)$$

- (a) Après avoir injecté dans le système d'équation différentielle de la question précédente les solutions sous forme harmonique, écrire le nouveau système d'équations différentielles sous forme matricielle :

$$D \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

avec

$$D = \begin{pmatrix} -\omega^2 + \omega_0^2 & -\omega_0^2/2 & 0 \\ -\omega_0^2/2 & -\omega^2 + \omega_0^2 & -\omega_0^2/2 \\ 0 & -\omega_0^2/2 & -\omega^2 + \omega_0^2 \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

3. On rappelle qu'il n'existe des solutions non nulles pour les  $a_n$  ( $n = 1, 2, 3$ ) que si le déterminant<sup>16</sup> de  $D$  est nul (ou dit autrement que  $D$  est non inversible). Montrer alors que  $\omega^2$  est solution de l'équation :

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^3 - (\omega_0^2 - \omega^2) \frac{\omega_0^4}{2} = 0$$

4. Calculer les trois solutions de cette équation<sup>17</sup>. Donner pour chacune d'elles les rapports  $a_2/a_1, a_3/a_1$  (i.e. la forme modes propres<sup>18</sup>).

5. La masse (1) est maintenant soumise à un mouvement sinusoïdal forcé  $x_A = a \cos \omega t$ ,  $\omega$  est quelconque.

(a) Écrire les équations du mouvement du système et expliciter en régime permanent les amplitudes du mouvement de chaque masse.

(b) Montrer que l'amplitude de la masse 1 s'annule pour deux fréquences que l'on précisera.

16. Vous pouvez utiliser la méthode des cofacteurs, sinon on rappelle que

$$\det M = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (a \cdot e \cdot i + d \cdot h \cdot c + g \cdot b \cdot f) - (g \cdot e \cdot c + a \cdot h \cdot f + d \cdot b \cdot i)$$

17. Ne surtout pas développer l'expression! Mettre  $(\omega_0^2 - \omega^2)$  en facteur et les trois solutions de l'équation seront facilement trouvées.

18. On rappelle que l'on retrouve la forme des modes en injectant la pulsation des modes propres dans le système d'équations différentielles

### Pendule couplés - équation de Klein Gordon

On cherche à obtenir l'équation traduisant le propagation d'une onde le long d'une chaîne de pendules simples, identiques, de masse  $m$  et de longueur  $l$ , couplés par des ressorts de raideurs  $k$  (cf fig 4.6)

On posera  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  et  $\Omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ .

1. Appliquer le TMC en  $O_n$ , point d'accroche du pendule.
2. Montrer que l'équation de propagation liant les petits déplacements  $\psi_n \approx l\theta_n$ ,  $\psi_{n-1}$  et  $\psi_{n+1}$  est :

$$\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial t^2} = -\Omega_0^2 \psi_n + \omega_0^2 (\psi_{n-1} - 2\psi_n + \psi_{n+1})$$

3. Donner l'équation d'onde dans l'approximation du milieu continu. En quoi diffère-t-elle de l'équation de d'Alembert?

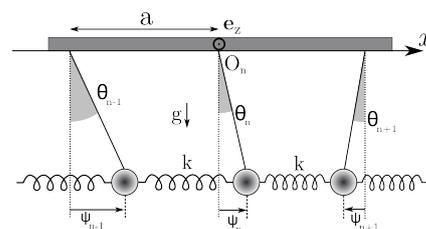


FIGURE 4.6: Chaîne de  $N$  pendules couplés par des ressorts (voir ex 4.3)

#### 4.4 CQFR

##### *Connaissances*

1. Connaître la forme et la pulsation du  $n$ -ème mode d'une chaîne de  $p$  oscillateurs couplés et symétriques.
2. Connaître l'écriture mathématique du mouvement total de la masse  $p$ .
3. Connaître l'évolution générale de la forme des modes en fonction de leur numéro (cf fig 4.4).
4. Connaître la démarche<sup>19</sup> pour passer du cas discret au cas continu ( $N \rightarrow \infty$ ).
5. Connaître l'équation de d'Alembert.

19. NB : il ne s'agit pas ici de "savoir-faire" mais bien de connaissances car cette démarche se retrouve dans d'autres domaines de la physique

##### *Savoir-faire*

1. Savoir établir l'équation différentielle régissant le mouvement de la  $p$ -ème masse sur une chaîne de  $N$  oscillateurs couplés symétriques.
2. Savoir dessiner la forme des modes si on redonne l'expression mathématique de la forme et la pulsation du  $n$ -ème mode d'une chaîne de  $p$  d'oscillateurs couplés et symétriques.



## 5 L'équation d'onde

NOUS VENONS DE VOIR que le couplage de  $N$  oscillateurs identiques avec  $N \rightarrow \infty$  conduit à l'équation d'onde de d'Alembert.

Nous allons dans ce chapitre prendre un peu de recul et constater que les concepts vus au cours des chapitres précédents sont transversaux et se retrouvent dans toutes les branches de la physique.

Nous étudierons successivement une onde se propageant le long d'une corde, les ondes acoustiques et les ondes électromagnétiques au sein d'un câble coaxial. Dans ces trois situations nous aboutirons au fait que :

- La propagation concerne deux grandeurs qui sont *couplées*. La variation spatiale de l'une crée une variation temporelle de l'autre et vice versa.
- La propagation se résume mathématiquement à une équation d'onde qui sera dans les cas présentés ici l'équation d'onde de d'Alembert. Cette équation est la *même* pour les deux grandeurs couplées.
- Lors de la propagation, il n'y a pas de déplacement global de matière, mais il y a un déplacement de l'énergie et donc de l'information associée.
- Une des deux grandeurs couplées est reliée<sup>1</sup> à l'énergie cinétique et peut être vue comme une (vitesse de) déformation. L'autre grandeur est reliée à l'énergie potentielle et peut être vue comme une contrainte.
- Le *produit* des deux grandeurs qui se propagent est homogène à une *puissance* (éventuellement surfacique).

Nous nous intéresserons aux solutions de l'équation l'onde au chapitre 7.

### Sommaire

5.1	Onde méca . . . . .	78
5.2	Onde acoustique . . . . .	80
5.3	Onde coax. . . . .	84
5.4	TD 5 . . . . .	87
5.5	CQFR . . . . .	89

1. Il faut pour cela prendre son carré

2. L'autre archétype étant les ondes à la surface de l'eau. Néanmoins, la physique de ce phénomène est plus compliqué. Vous l'aborderiez brièvement en TP avec l'étude de la cuve à onde

3. La masse linéique est la masse volumique d'un objet unidimensionnel. Elle s'exprime en  $\text{kg m}^{-1}$ . Pour obtenir expérimentalement sa valeur, on pèse la corde et on divise par la longueur de cette dernière

### 5.1 Onde mécanique le long d'une corde

L'archétype de l'onde est assurément une onde se propageant le long d'une corde<sup>2</sup>. Nous allons voir quels sont les phénomènes physiques mis en jeu dans la naissance de l'onde. Leur traduction mathématique conduira ensuite à l'équation d'onde.

#### 5.1.1 Position du problème

Soit une corde inextensible et de masse linéique<sup>3</sup>  $\mu$  tendue à ses deux extrémités. Intéressons-nous à une zone quelque part vers le milieu de la corde et plus précisément à une portion comprise entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$ . Comme la corde est supposée inextensible, la portion de corde entre  $x$  et  $x + dx$  ne peut pas changer d'abscisse, par contre elle peut changer de hauteur. Ce changement est repéré par la variable  $y(x, t)$  (voir fig 5.1).

De même que dans la chaîne de masse-ressort, la masse  $p$  interagit avec les masses  $p - 1$  et  $p + 1$  via des ressorts de couplage, la portion de corde comprise entre  $x$  et  $x + dx$  est en interaction avec les portions de corde voisines. Cette interaction est appelée *tension*. En regardant plus en détail, presque à l'échelle microscopique, nous pourrions retrouver un système équivalent à des masses-ressort, mais nous allons rester à l'échelle macroscopique et sobrement appeler cette interaction "tension"  $T$ . A gauche, à l'abscisse  $x$ , la tension est notée  $T(x)$ . A droite, à l'abscisse  $x$ , la tension est notée  $T(x + dx)$ .

Dès que la portion de corde n'est pas à l'équilibre, ou dit mathématiquement dès que  $y(x, t) \neq 0$ , une force de rappel élastique apparaît au niveau de la portion de la corde. De façon presque symétrique, s'il apparaît une force, i.e. si  $T(x)$  et/ou  $T(x + dx) \neq 0$  alors, via la seconde loi de Newton, l'accélération de la portion de corde n'est plus nulle. La vitesse de la portion de corde et la force de tension sont donc *couplées* : la variation d'une de ces deux quantités déclenche l'évolution de l'autre. Comme nous allons le voir ce couplage est à l'origine de l'onde.

#### 5.1.2 Équation d'onde transversale le long d'une corde

Mettons en équation les idées évoquées plus haut. Commençons par appliquer le PFD à la portion de corde compris entre  $x$  et  $x + dx$ . En s'appuyant sur le schéma 5.1 nous pouvons écrire :

$$\text{Selon } x : m\ddot{x} = -T(x) \cos \alpha(x) + T(x + dx) \cos \alpha(x + dx)$$

$$\text{Selon } y : m\ddot{y} = -T(x) \sin \alpha(x) + T(x + dx) \sin \alpha(x + dx)$$

Ce qui donne dans l'approximation des petits angles :

$$m\ddot{x} \approx -T(x) + T(x + dx) \tag{5.1}$$

$$m\ddot{y} \approx -T(x)\alpha(x) + T(x + dx)\alpha(x + dx) \tag{5.2}$$

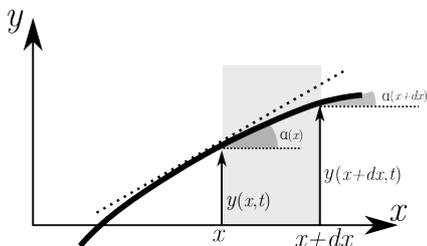


FIGURE 5.1: Schéma d'un bout de corde compris entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$ .

La corde étant supposée inextensible il ne peut pas y avoir de mouvement latéral de la portion de corde. Par conséquent son accélération latérale  $\ddot{x}$  est nulle. Et l'équation 5.1 selon  $x$  donne :

$$T(x) + T(x + dx) = 0 \Rightarrow T(x) = T(x + dx) \Rightarrow T(x) = \text{cste} = T_0$$

La norme de la tension de la corde est donc constante, par contre son orientation peut varier entre l'abscisse  $x$  et  $x + dx$ , ce que l'on peut étudier via l'équation portant sur  $y$  :

$$m\ddot{y} = \mu dx \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = T_0 \alpha(x + dx) - T_0 \alpha(x) \quad (5.3)$$

$$= T_y(x + dx) - T_y(x) \quad (5.4)$$

$$= \frac{\partial T_y(x, t)}{\partial x} dx \quad (5.5)$$

soit :

Première équation de couplage

$$\mu \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial T_y(x, t)}{\partial x} \quad (5.6)$$

Nous venons donc de trouver la première équation qui couple les variations temporelles de la vitesse verticale de la portion de corde aux variations spatiales de la force de rappel  $T_y$ .

Revenons maintenant sur l'expression de la composante verticale de la force de tension  $T_y$ , c'est à dire  $T = T_0 \sin \alpha$ . Dans le cadre des petits angles nous pouvons modifier cette expression<sup>4</sup> :

$$T_y = T_0 \sin \alpha \approx T_0 \alpha = T_0 \frac{dy}{dx} \quad (5.7)$$

car  $\alpha$  est l'angle entre l'axe  $x$  et la droite tangente<sup>5</sup> à la courbe. C'est-à-dire la dérivée de la courbe  $y(x)$ .

On<sup>6</sup> peut alors dériver l'expression 5.7 par rapport au temps pour faire apparaître la vitesse verticale de la portion de la corde :

Deuxième équation de couplage

$$\frac{\partial T_y(x, t)}{\partial t} = T_0 \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \quad (5.8)$$

et ainsi aboutir à la seconde équation qui couple cette fois les variations spatiales de la vitesse verticale au variation temporelle de la force de rappel  $T_y$ .

### 5.1.3 Équations d'ondes

La première équation d'onde s'obtient en découplant les équations 5.6 et 5.8. Plus exactement, dérivons l'équation 5.6 par rapport au

4. Nous utilisons le triangle rectangle d'hypoténuse  $ds$  et de côté  $y(x, t)$  et  $dx$  (voir fig. 5.1), la tangente de l'angle  $\alpha$  est égale au côté opposé sur le côté adjacent soit  $y(x, t)$  sur  $dx$

5. Une autre façon de le voir est que  $\alpha$  est l'angle dans le triangle rectangle de côté  $dx$  et  $dy$  tel que  $\tan \alpha = \frac{dy}{dx} \approx \alpha$  dans le cadre des petits angles

6. Dans le cas de la chaîne infinie de masses et de ressorts, les deux grandeurs couplées sont la vitesse  $v(x, t)$  des masses et l'intensité de la force de Hooke  $F(x, t)$ . Les deux équations de couplage sont le PFD :

$$\begin{aligned} \rho dx \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} &= F(x + dx, t) - F(x, t) \\ &= \frac{\partial F(x, t)}{\partial x} dx \end{aligned}$$

et la loi de Hooke pour une masse ayant deux ressorts de par et d'autre :

$$\begin{aligned} F(x, t) &= -\frac{E}{dx} (\xi(x) - \xi(x + dx)) \\ &= E \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} \end{aligned}$$

puis dérivée par rapport au temps :

$$\frac{\partial F(x, t)}{\partial t} = E \frac{\partial v(x, t)}{\partial x}$$

temps et dérivons l'équation 5.8 par rapport à la position. En formant :

$$\partial_t(1) + \partial_x(2) : \mu \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 T_y(x,t)}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 T_y(x,t)}{\partial x \partial t} + T_0 \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \quad (5.9)$$

et nous aboutissons à la première équation d'onde portant sur la vitesse d'une portion de la corde :

Équation de propagation portant sur la vitesse verticale

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad c^2 = \frac{T_0}{\mu} \quad (5.10)$$

où on a posé  $c = \sqrt{T_0/\mu}$  qui est homogène à une vitesse et qui est la vitesse de l'onde<sup>7</sup> comme nous le verrons au chapitre 7.

La deuxième équation<sup>8</sup> s'obtient via :

$$T_0 \partial_x(1) + \mu \partial_t(2) : \mu T_0 \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t \partial x} + \mu \frac{\partial^2 T_y(x,t)}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 T_y(x,t)}{\partial x^2} + \mu T_0 \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x \partial t} \quad (5.11)$$

ce qui donne :

Équation de propagation portant sur la tension verticale

$$\frac{\partial^2 T_y(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 T_y(x,t)}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad c^2 = \frac{T_0}{\mu} \quad (5.12)$$

Nous verrons au chapitre 7 que ces deux grandeurs qui se propagent échangent en permanence de l'énergie. Plus précisément, l'une des deux grandeurs est en lien avec de l'énergie sous forme cinétique (ici via la vitesse verticale) et l'autre de l'énergie sous forme potentielle (ici via la tension verticale de la corde).

D'autre part, la grandeur associée à l'énergie cinétique (ici la vitesse verticale) peut être vue comme une (vitesse de) déformation et la grandeur associée à l'énergie cinétique (ici la tension verticale) comme une contrainte.

Notons enfin au passage que le produit des deux grandeurs qui se propagent, force et vitesse, est homogène à une puissance.

## 5.2 Onde acoustique

Les ondes acoustiques accompagnent notre quotidien. Leur vitesse de propagation (de l'ordre de  $340 \text{ m s}^{-1}$ ) est grande par rapport aux vitesses habituelles et de ce fait nous pouvons avoir tendance à oublier qu'il s'agit d'une onde.

Comme toute onde, les rouages microscopiques des ondes acoustiques peuvent être interprétés en terme d'une chaîne infinie d'oscillateurs harmoniques de type masse-ressort. Ici, les masses seront les

7. ATTENTION :  $c$  est la vitesse de l'onde et  $v$  la vitesse verticale d'un élément infinitésimal de la corde se trouvant entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$ .

8. Il est possible aussi d'obtenir une équation d'onde portant sur  $y$ , la position verticale d'un élément de corde. Cela fait l'objet de l'exercice 5.4

molécules contenues dans le gaz et le rôle des ressorts va être joué par les forces de pressions<sup>9</sup>.

Au tout début de la naissance de l'onde, de l'énergie est apportée sous forme cinétique aux molécules d'air. On peut par exemple penser à la membrane d'un haut-parleur qui met en mouvement les molécules. Les molécules, en se déplaçant, s'accumulent aux molécules qui n'ont pas encore été mis en déplacement créant ainsi une zone où la pression est légèrement plus grande que la pression atmosphérique (ce qui pour notre analogie revient à compresser un ressort). Les molécules contenues dans cette zone vont ensuite la fuir vers les zones où la pression est plus faible (ce qui pour notre analogie revient à allonger un ressort). Une partie des molécules revient vers le haut-parleur mais une autre progresse dans la direction opposée.

Au final, les molécules d'air *oscillent* sur place<sup>10</sup> autour de leur position d'équilibre<sup>11</sup> en transmettant une partie de leur énergie aux molécules voisines. Nous savons que si ces oscillations sont de faibles amplitudes nous pourrions les approximer par un oscillateur harmonique (cf chapitre 1).

Nous avons donc pour une onde acoustique un comportement similaire à celui d'une chaîne infinie d'oscillateurs harmoniques identiques et couplés. Le couplage s'effectue via les forces de pression et pour le décrire il va falloir passer par une (courte) étude thermodynamique de la compression d'un gaz.

### 5.2.1 Équations de couplage

Considérons un volume d'air initialement à l'équilibre, compris entre les positions  $x$  et  $x + dx$ .

L'étude de l'air, qui est un fluide, relève a priori de la mécanique des fluides. Il est très courant en mécanique des fluides de définir la pression et la vitesse du fluide en termes de champs  $p(x, t)$  et  $v(x, t)$ . On parle alors d'approche eulérienne, on ne suit pas en particulier une particule de fluide, mais on regarde l'évolution des grandeurs (surpressions, vitesses, ...) au point  $x$  de l'espace au cours du temps  $t$ . Cette approche, en considérant un fluide parfait, c'est-à-dire en négligeant sa viscosité, conduit à l'équation d'Euler (cf cours de mécanique des fluides) qui est l'équivalente du PFD pour un fluide parfait en description eulérienne.

Afin de ne pas avoir à faire tous ces développements de mécanique des fluides au sein de ce cours dédié aux ondes, nous allons utiliser une approche lagrangienne<sup>12</sup> du problème<sup>13</sup>. C'est à dire que nous allons continuer à suivre une seule<sup>14</sup> molécule d'air au cours du temps.

Soit donc  $\zeta(x, t)$  le déplacement de la particule que l'on décide de suivre. Plus précisément,  $x$  est la position de la particule lorsque le fluide est au repos, alors que sa position à l'instant  $t$  correspond à

9. A y regarder plus en détails, la pression est un concept macroscopique qui n'a donc pas sens à l'échelle microscopique. La vraie force qui va jouer le rôle de ressort est la force électrostatique lors des chocs des molécules d'air.

10. Au contraire du vent par exemple, où il y a un réel déplacement des molécules d'air

11. Comme dit plus bas, à cause de l'agitation thermique, les molécules ont aussi un mouvement brownien aléatoire. En toute rigueur, une molécule d'air, contrairement à un atome dans un solide, n'a pas de position d'équilibre. Cependant, si on considère un volume d'air suffisamment grand pour que statistiquement le nombre de molécules dans ce volume soit constant, alors le centre de masse de ces molécules peut être considéré comme un point d'équilibre.

12. NB : il n'y a pas de lien direct avec la *mécanique* lagrangienne, c'est à dire la formulation variationnelle de la mécanique.

13. L'approche eulérienne est tout de même présentée dans l'exercice 5.4

14. En fait, à cause de l'agitation thermique, les molécules ont principalement un mouvement brownien, donc aléatoire. Il n'est donc pas possible stricto sensu de suivre une seule molécule. Cela n'a au final pas d'importance bien qu'une description eulérienne du système serait plus juste.

$$x + \zeta(x, t).$$

De plus le fluide sera décrit par la masse volumique  $\rho(x, t)$ , la pression  $P(x, t)$  et la vitesse d'une particule  $v(x, t) = \partial\zeta(x, t)/\partial t$ .

Nous effectuons dès maintenant l'hypothèse que les variations de pression et de masse volumique dues à l'onde acoustique restent faible en valeur relative. Nous vérifierons numériquement cette hypothèse par la suite (cf section ?? p.??).

Nous allons montrer que la pression  $p(x, t)$  et la vitesse  $v(x, t)$  de la particule sont couplées et qu'une fois découplées ces deux grandeurs sont solutions de l'équation d'onde de d'Alembert.

Nous avons besoin de trois équations : l'équation du mouvement, la conservation de la masse, une équation thermodynamique caractérisant la compression du fluide.

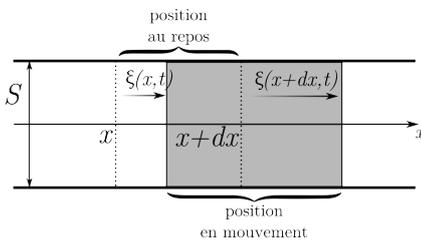


FIGURE 5.2: Schéma de la tranche de fluide où est appliqué le principe fondamental de la dynamique

1. Appliquons pour commencer le PFD à la particule. Cette dernière a pour masse :

$$dm = \rho_0 S dx$$

et elle est soumise à deux forces de pressions

- (a) celle en amont qui vaut  $P_0 + p(x, t)$
- (b) celle en aval qui vaut  $P_0 + p(x + dx, t)$

Nous avons donc :

$$dm \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = S [p(x, t) - p(x + dx, t)] \approx -S \frac{\partial p}{\partial x} dx$$

soit finalement, la première équation qui couple la pression et la vitesse :

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} \tag{5.13}$$

15. La conservation de la masse s'écrit de façon générale :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho v) = 0$$

Nous allons ici la retrouver dans le cas 1D à partir d'un raisonnement sur un volume de fluide.

2. La conservation de la masse<sup>15</sup>

Considérons un élément de fluide et étudions sa variation de volume  $dV$  lors du passage de l'onde :

$$dV = S [dx + \zeta(x + dx, t) - \zeta(x, t)] \approx S dx \left( 1 + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)$$

ce qui donne donc pour sa masse volumique :

$$\rho_0 + \delta\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{\rho_0 S dx}{S dx \left( 1 + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)} \approx \rho_0 \left( 1 - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)$$

soit :

$$\delta\rho = -\rho_0 \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

ce qui dérivé par rapport au temps donne une équation couplant la variation de masse volumique et la vitesse :

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(\delta\rho)}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \tag{5.14}$$

3. La troisième équation établit un lien entre la masse volumique  $\delta\rho$  et la surpression  $p$ . En d'autres termes, comment évolue la masse volumique du fluide lorsqu'on le comprime (ou le détend)? Le coefficient de compressibilité  $\chi$  répond à cette question, il est défini par :

$$\chi = -\frac{1}{V_0} \frac{dV}{dP} = \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho}{dP} \quad (5.15)$$

Cependant, lorsque l'on comprime un gaz celui-ci a tendance à s'échauffer, ce qui rend la mesure de  $\chi$  difficile. Il est donc plus facile expérimentalement de déterminer le coefficient de compressibilité isotherme  $\chi_T$  (où on place le gaz au contact d'un thermostat lors de la compression) ou le coefficient de compressibilité adiabatique  $\chi_S$  (où le gaz est placé dans une enceinte calorifugée), qui sont définis par :

$$\chi_T = -\frac{1}{V_0} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \quad \text{et} \quad \chi_S = -\frac{1}{V_0} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_S$$

L'expérience montre que la compression du fluide lors de la propagation d'une onde sonore est plus adiabatique<sup>16</sup> qu'isotherme. Nous allons donc utiliser le coefficient  $\chi_S$  pour relier la variation de masse volumique  $\delta\rho$  et la surpression :

$$\delta\rho \approx \left( \frac{\partial\rho}{\partial P} \right)_S p = \rho\chi_S p \quad (5.16)$$

En injectant cette expression dans l'équation qui lie masse volumique et vitesse (eq 5.14), nous obtenons une équation différentielle qui couple la vitesse et la pression :

$$\chi_S \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (5.17)$$

### 5.2.2 Équations d'onde

Les deux équations différentielles 5.13 et 5.17 couplent les champs de pression et de vitesse. Plus précisément, une variation temporelle de la pression crée une variation spatiale de la vitesse des molécules et inversement. Les deux quantités vitesse des molécules et pression s'entrelient mutuellement ce qui explique qualitativement l'apparition d'une onde.

Nous pouvons alors obtenir l'équation d'onde s'appliquant par exemple au champ de vitesse en découplant les équations 5.13 et 5.17.

Si nous prenons la dérivée temporelle de 5.13 multipliée par  $\chi_S$  et soustrayons la dérivée spatiale de 5.17 nous obtenons :

$$\chi_S \rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \chi_S \cancel{\frac{\partial^2 p}{\partial t \partial x}} = -\chi_S \cancel{\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial t}} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

Nous obtenons alors une équation de d'Alembert portant sur la vitesse :

16. En effet, la propagation de l'onde a lieu tellement vite par rapport aux temps caractéristiques d'échanges thermiques que l'énergie de l'onde n'a pas le temps de passer sous forme thermique. Le gaz s'échauffe lors des compressions (il n'est donc pas isotherme), mais il n'a pas le temps de transmettre ce surplus d'énergie thermique avant que la phase de décompression se produise en lui reprenant l'énergie.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi S}} \quad (5.18)$$

En procédant de manière similaire nous obtenons aussi une équation de d'Alembert pour le champ de pression :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi S}} \quad (5.19)$$

Nous voyons donc à nouveau que la propagation d'une onde met en jeu deux grandeurs qui sont couplées par leurs variations temporelles et spatiales. Les deux grandeurs sont ici pour les ondes acoustiques :

- la *surpression*  $p(x, t)$  qui stocke et échange l'énergie sous forme *potentielle* et qui peut être vue comme une *contrainte*
- la *vitesse*<sup>17</sup>  $v(x, t)$  des molécules qui stocke et échange l'énergie sous forme *cinétique* et qui peut être vue comme une *vitesse de déformation*.

Notons à nouveau que le produit de la surpression par la vitesse est homogène à une puissance surfacique.

17. A ne pas confondre avec la vitesse  $c$  de propagation de l'onde.

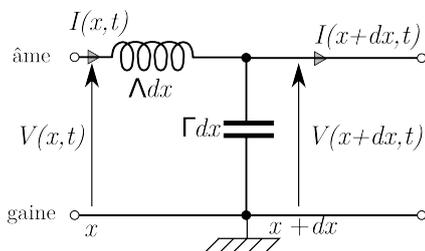


FIGURE 5.3: Schéma électrique d'un câble coaxial

18. Parfois appelé improprement "BNC" (Bayonet Neill-Concelman), car la connectique en bout de câble est très souvent de type BNC.

19. cf effet de peau en électromagnétisme

20. NB : On néglige ici toute perte (résistance et admittance de fuite entre l'âme et la gaine) qui conduirait à une absorption et donc une dispersion de l'onde (cf chapitre 10)

### 5.3 Onde électromagnétique le long d'un câble coaxial

Un câble coaxial<sup>18</sup>, très souvent utilisé en électronique, permet de transporter deux signaux électriques. Ce câble est constitué :

- d'un conducteur central appelé *âme* du conducteur (*core* en anglais),
- d'une couche d'isolant qui enrobe l'âme,
- d'une tresse métallique (le deuxième conducteur) qui entoure le tout. La tresse métallique assure un blindage<sup>19</sup> électromagnétique et la plupart du temps est au potentiel de la masse du système électrique.

Ce câble, mettant en regard deux conducteurs, possède nécessairement une capacité. Un bout de câble de longueur  $dx$  a une capacité  $dC = \Gamma dx$  où  $\Gamma$  est la capacité linéique.

Même s'il n'y a pas d'enroulement (i.e. de bobine) apparent, ce câble possède aussi une auto-inductance. Un bout de câble de longueur  $dx$  a une auto-inductance que nous noterons  $dL = \Lambda dx$  où  $\Lambda$  est l'inductance linéique.

Un tronçon de câble peut donc être représenté<sup>20</sup> par le schéma de la figure 5.3.

Une variation de courant aux bornes de la bobine crée un champ magnétique qui par induction crée une tension  $V(x, t)$ . Cette tension met en mouvement les charges stockées sur les armatures du

condensateur. Ce mouvement de charge est le courant  $I(x + dx)$  qui, comme précédemment, crée par induction dans la bobine la tension  $V(x + dx)$  qui, comme précédemment, met en mouvement les charges du condensateur suivant ... Ainsi, de proche en proche, l'onde se propage le long du câble coaxial.

Ici, en s'inspirant de l'équivalence électromécanique (cf tableau 2.1), nous pouvons dire d'une part que le condensateur joue le rôle du ressort où l'énergie est stockée sous forme potentielle<sup>21</sup> dans le condensateur et d'autre part que la bobine joue le rôle de la masse sous forme cinétique<sup>22</sup> dans la bobine.

Nous allons appliquer les lois de Kirchoff<sup>23</sup> (loi des nœuds et des mailles) pour trouver les deux équations différentielles couplées entre le courant  $I$  au point  $x$  et au temps  $t$ ,  $I(x, t)$ , et le champ des tensions  $V(x, t)$ .

### 5.3.1 Équations de couplages

La loi des nœuds indique que le courant circulant dans le condensateur vaut  $I(x) - I(x + dx)$ , d'où la dérivée temporelle de la tension au borne du condensateur<sup>24</sup> :

$$I(x) - I(x + dx) = \Gamma dx \frac{\partial U}{\partial t}$$

et donc en reconnaissant la dérivée :

Équation de couplage 1

$$\Gamma \frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\partial I}{\partial x} \tag{5.20}$$

La tension<sup>25</sup> aux bornes de l'inductance (en convention récepteur) est  $V(x) - V(x + dx)$ , d'où le courant aux bornes de l'inductance :

$$V(x) - V(x + dx) = \Lambda dx \frac{\partial I}{\partial t}$$

et en reconnaissant la dérivée :

Équation de couplage 2

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = \Lambda \frac{\partial I}{\partial t} \tag{5.21}$$

En dérivant par rapport au temps 5.20 (puis en multipliant par  $\Lambda$ ) et en dérivant par rapport à l'espace l'équation 5.21 et en ajoutant enfin les deux on obtient :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \Gamma \Lambda \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\Lambda \frac{\partial^2 I}{\partial t \partial x} + \Lambda \frac{\partial^2 I}{\partial x \partial t}$$

Nous obtenons :

21. Microscopiquement, il s'agit de l'énergie électrostatique d'interaction entre les charges stockées sur une même face du condensateur.

22. Le courant est l'analogie de la vitesse et l'inductance l'équivalent de la masse.

23. On pourrait aussi utiliser les équations de Maxwell et obtenir des relations entre le champ électrique et le champ magnétique. C'est ce que l'on fait implicitement en utilisant les lois de Kirchoff.

A ce sujet, les ondes électromagnétiques proviennent du couplage du champ électrique et du champ magnétique.

Une variation spatiale du champ électrique  $E$  crée une variation temporelle du champ magnétique  $B$  : c'est l'équation de Maxwell-Faraday

$$\text{rot } E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

Inversement, une variation temporelle du champ électrique (aussi appelée courant de déplacement) crée une variation spatiale du champ magnétique, c'est l'équation de Maxwell-Ampère sans source de courant :

$$\text{rot } B = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t}$$

Une fois ces deux équations découplées, nous obtenons une équation d'onde de d'Alembert portant sur le champ électrique  $E$  ou le champ magnétique  $B$ .

24. Pour un condensateur de capacité  $C$ , la tension à ses bornes  $V$  est fonction de la charge  $Q$  portée par les armatures :  $Q = CV$ , ce qui donne  $I = C \partial U / \partial t$  en dérivant temporellement

25. La loi de Lenz-Faraday donne pour l'auto-induction  $U_L = L \partial I / \partial t$

Équation de propagation de la tension

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\Gamma\Lambda}} \quad (5.22)$$

et de même pour  $I$  :

Équation de propagation du courant

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\Gamma\Lambda}} \quad (5.23)$$

La vitesse  $c$  de l'onde s'identifie alors à :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\Gamma\Lambda}}$$

Encore une fois, nous voyons qu'une onde nécessite pour se propager deux grandeurs couplées  $A$  et  $B$ , qui, dit de façon imagée, participent à une course de relais. La variation temporelle (resp. spatiale) de  $A$  permet de passer le relais à la grandeur  $B$  sous forme spatiale (resp. temporelle). Mais la variation spatiale (resp. temporelle) de  $B$  crée une variation temporelle (resp. spatiale) de  $B$  qui repasse le relais à  $A$  car une variation temporelle (resp. spatiale) de  $B$  crée une variation spatiale (resp. temporelle) de  $A$ .

En terme énergétique, les deux grandeurs couplées échangent de l'énergie l'une sous forme potentielle (le ressort ici le condensateur) et l'autre sous forme d'énergie cinétique (la masse ici la bobine).

La grandeur stockant l'énergie sous forme potentielle peut être vue comme une contrainte (ici les électrons sont contraints à se regrouper sur les armatures du condensateur), là où la grandeur stockant l'énergie sous forme cinétique peut être vue comme une déformation (ici le courant donc le déplacement d'électrons peut être vu comme une déformation).

Notons enfin que le produit d'une tension par un courant est homogène à une puissance.

## 5.4 TD 5

## Questions de cours

1. Quelles sont les éléments indispensables à la propagation d'une onde ?
2. Donner l'équation d'onde de d'Alembert.
3. Quelles sont les grandeurs couplées qui se propagent pour :
  - une onde sur une corde
  - les ondes acoustiques
  - une onde électromagnétique dans un câble coaxial
4. A quoi est homogène le produit des deux grandeurs qui se propagent ?

## Équation d'onde acoustique - approche eulérienne

L'équation gouvernant l'évolution d'un fluide parfait (c'est à dire où on néglige les pertes d'énergie interne due à la viscosité) est l'équation d'Euler :

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} \right) = -\mathbf{grad} P \quad (5.24)$$

1. Montrer que la forme linéarisée, c'est à dire en se limitant au terme d'ordre 1, de l'équation d'Euler est :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\mathbf{grad} P \quad (5.25)$$

2. Retrouver dans le cas unidimensionnel les équations couplant les variations du champ de pression et du champ de vitesse des particules du milieu portant l'onde acoustique
3. Retrouver les équations d'onde de d'Alembert portant sur le champ de vitesse et le champ de pression.

## Équation d'onde pour la position verticale le long d'une corde

Considérons une corde de masse linéique  $\mu$ . La corde est tendue entre deux points fixes (comme sur une guitare ou un piano par exemple) et la pesanteur influe peu sa forme, par conséquent nous la négligerons.

Soit (cf fig 5.4) :

- $y(x, t)$  le déplacement transversal de la corde à l'abscisse  $x$  et à l'instant  $t$ .
- $\alpha(x, t)$  l'angle de la tangente à cette corde avec l'horizontale en  $x$  à l'instant  $t$ . L'angle  $\alpha$  est petit et il pourra être confondu avec sa tangente.

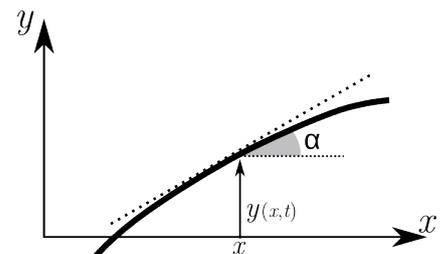


FIGURE 5.4: Schéma d'une portion de corde. (cf Onde en position le long de la corde)

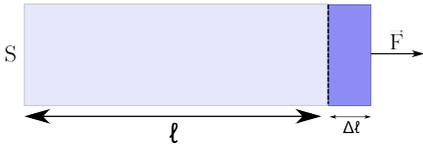


FIGURE 5.5: Schéma explicitant les grandeurs intervenant dans la force de Hooke s'exerçant sur un barreau solide.

26. Nous ne considérons ici que la déformation longitudinale. Nous négligeons donc les contractions latérales.

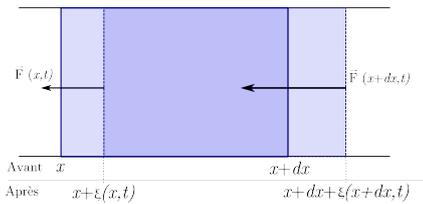


FIGURE 5.6: L'élément mésoscopique est situé au repos entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$ , et sous l'effet des efforts externes est déplacé entre  $x + \zeta(x, t)$  et  $x + dx + \zeta(x + dx, t)$

1. Soit un bout de corde de longueur  $dx$  compris entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$ . Appliquer le PFD à l'élément de corde en la projetant successivement sur l'axe  $y$  puis l'axe  $x$ .
2. Montrer, grâce à la projection selon l'axe  $x$ , que la norme de la tension de la corde est constante dans le cas des petits angles.
3. Obtenir l'équation d'onde de d'Alembert décrivant la propagation des ondes à partir de la projection du PFD sur l'axe  $y$ .

*Ondes sonores dans un solide élastique.*

Soit un barreau solide décrit sur la figure 5.5.

On suppose que la déformation élastique du matériau est décrite par la loi de Hooke. Plus précisément, si on applique une force  $F$  à une extrémité du solide de section  $S$ , l'allongement<sup>26</sup> relatif  $\Delta\ell/\ell$  du solide est donné par :

$$\frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{1}{E} \frac{F}{S} \tag{5.26}$$

où  $E$  est le module de Young. Pour les matériaux il est de l'ordre de  $1 \times 10^{11}$  Pa to  $1 \times 10^{12}$  Pa.

Dans cet exercice nous cherchons à établir l'équation d'onde portant sur le champ des déformations longitudinales  $\zeta(x, t)$ .

1. Soit un élément mésoscopique de la barre schématisée sur la figure 5.6. Exprimer l'allongement  $\Delta\ell$  du à l'onde.
2. En utilisant la loi de Hooke, donner la force  $F(x, t)$  exercée par la partie "droite" du solide sur la partie "gauche" à l'abscisse  $x$  à l'instant  $t$  afin d'obtenir une équation différentielle qui relie les dérivées de la déformation  $\zeta(x, t)$  et la force  $F(x, t)$ .
3. Appliquer le PFD à l'élément mésoscopique pour obtenir une autre équation qui couple les dérivées de la déformation  $\zeta(x, t)$  et de la force  $F(x, t)$ .
4. Obtenir l'équation d'onde portant sur le champ des déformations longitudinales  $\zeta(x, t)$ . Quelle est la vitesse de propagation de l'onde?
5. Application numérique : Pour le fer,  $\rho = 7.9 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$  et  $E = 2 \times 10^{11}$  Pa.

## 5.5 CQFR

### Connaissances

1. Une onde met en jeu deux grandeurs  $A$  et  $B$  qui sont couplées par des équations différentielles.
2. Une variation temporelle (resp. spatiale) de  $A$  crée une variation spatiale (resp. temporelle) de  $B$ . En d'autres termes,  $A$  et  $B$  s'entretiennent mutuellement au fur et à mesure de la propagation de l'onde.
3. Une fois découplées, les deux équations différentielles conduisent à l'équation d'onde. Cette équation est la même pour  $A$  et  $B$ .
4. Dans les cas étudiés dans ce chapitre, l'équation d'onde de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}.$$

où  $c$  est la vitesse de l'onde.

5. Une des deux grandeurs, disons  $A$ , est liée à l'énergie cinétique (la masse dans le système masse ressort). Son action peut être interprétée comme une déformation. L'autre grandeur,  $B$ , est liée à l'énergie potentielle (le ressort dans le système masse ressort). Son action peut être interprétée comme une contrainte.
6. Le produit  $AB$  est homogène à une puissance (éventuellement surfacique).
7. Lors de la propagation, il n'y a pas de déplacement global de matière, mais il y a un déplacement de l'énergie et donc de l'information associée.

### Savoir-faire

1. Savoir établir les équations de couplage à partir de bilans mésoscopiques sur un élément du milieu de propagation compris entre  $x$  et  $x + dx$ .
2. Savoir découpler les deux équations pour aboutir à l'équation d'onde.





## 6 Quelques éléments d'analyse de Fourier

LA TRANSFORMÉE DE FOURIER est un outil mathématique assez fantastique.

Nous allons l'utiliser dans les chapitres suivants pour décomposer n'importe quelle onde en briques de base élémentaires à savoir les ondes planes monochromatiques. Néanmoins, la transformée de Fourier est un outil utile dans toutes les branches de la physique voire de la méta-physique ...

Il s'agit donc dans ce cours d'un pas de coté mathématique avant d'étudier la solution des équations de d'Alembert.

Nous allons tout d'abord étudier les développements en série de Fourier qui s'appliquent aux fonctions périodiques. Nous verrons que les fonctions harmoniques de la forme  $\cos n\omega t$  et  $\sin n\omega t$  forment une base sur laquelle on peut décomposer n'importe quelle fonction périodique.

Nous verrons ensuite comment passer d'un développement en série de Fourier pour les fonctions périodiques aux transformations de Fourier qui permettent de décomposer (quasiment) n'importe quelle fonction en somme infinie de fonctions harmoniques.

Nous verrons alors pourquoi la transformation de Fourier est un outil capital pour l'étude des systèmes linéaires. Et plus particulièrement, pour le cas qui nous concerne, pourquoi les ondes planes harmoniques jouent un rôle aussi important dans l'études des ondes.

Nous finirons enfin le chapitre par quelques exemples de réalisation concrètes d'une transformée de Fourier et nous nous apercevrons que, comme Monsieur Jourdain fait de la prose, nous effectuons des transformées de Fourier en permanence sans nous en rendre compte.

### Sommaire

6.1	Les opérateurs intégraux . . .	92
6.2	Série de Fourier. . . . .	93
6.3	Transformée de Fourier . . .	98
6.4	Étude fréquentielle d'un système linéaire . . . . .	103
6.5	Comment réaliser une TF. . .	105
6.6	TD 6 . . . . .	107
6.7	CQFR . . . . .	109

## 6.1 Les opérateurs intégraux

La transformée de Fourier est la représentante la plus connue de ce qui est appelée en mathématique un *opérateur intégral*.

### 6.1.1 Comparer deux fonctions

L'idée initiale derrière les opérateur intégraux est de *comparer* à quel point deux fonctions se ressemblent ou, dit autrement, mesurer à quel point ces deux fonctions ont un lien en commun.

1. On aurait pu penser à des opérations un peu plus complexe comme par exemple le carré de la différence ( $[f(x) - g(x)]^2$ ) mais cette opération n'est pas linéaire

La comparaison s'effectue par une simple<sup>1</sup> multiplication terme à terme. Pour fixer les idées, prenons deux fonctions à valeurs discrètes :

$$\begin{aligned} f(x) &= 0, 2, 8, 12, 8, 2 \\ g(x) &= -1, 3, 4, -2, 1, 0 \end{aligned}$$

Leur produit :

$$f(x)g(x) = 0 \times -1 + 2 \times 3 + 8 \times 4 + 12 \times -2 + 8 \times 1 + 2 \times 0 = 32$$

indique à quel point la fonction  $f(x)$  ressemble à la fonction  $g(x)$ . Au maximum, elle sont identiques et leur produit prend la valeur maximale  $f^2(x)$ . Au minimum, les deux fonctions sont totalement décorréllées et leur produit vaut statistiquement zéro si on multiplie assez de termes.

Pour des fonctions continues le produit terme à terme devient mathématiquement un intégrale :

$$\int_a^b f(x)g(x)dx$$

les deux bornes  $a$  et  $b$  de l'intégrale définissant la zone sur laquelle on veut faire la comparaison.

### 6.1.2 Comparer une fonction à une famille de fonction

L'étape suivante pour arriver à la notion d'opérateurs intégraux n'est pas de comparer  $f(x)$  à une seule fonction  $g(x)$  mais à une *famille* de fonction  $g_y(x)$ . La variable  $y$ , permet de choisir quel représentant de la famille des fonction  $g$  on souhaite comparer à la fonction  $f(x)$ . On peut ainsi écrire  $g_y(x)$  comme une fonction de deux variables  $g_y(x) = g(x, y)$ .

Prenons tout de suite un exemple. Tout d'abord, considérons que la fonction  $f(t)$  est fonction du temps  $t$ . D'autre part, on prend la famille de fonctions  $g_{\cosinus}(t, \omega) = \cos(2\pi t\omega)$ . En comparant, la fonction  $f(t)$  à la famille de fonction  $g_{\cosinus}(t, \omega)$ , on la compare, en faisant varier continument la variable  $\omega$ , à tous les cosinus possibles. Le résultat n'est plus un simple nombre comme le "32" dans l'exemple

précédent, mais un ensemble de nombre qui dependent du  $\omega$  qui a été choisi. En d'autres termes, il s'agit d'une fonction  $F(\omega)$  de  $\omega$ . Ainsi on peut donc écrire :

$$\underbrace{F(\omega)}_{\substack{\text{Cartographie de la} \\ \text{ressemblance pour une} \\ \text{pulsation donnée}}} = \int_A \underbrace{f(t)}_{\substack{\text{fonction à sonder}}} \underbrace{\cos(2\pi t\omega)}_{\substack{\text{Famille de fonction} \\ \text{utilisée comme sonde}}} dt$$

La fonction  $F(\omega)$  indique à quel point, pour un  $\omega$  donné,  $f(t)$  ressemble à  $\cos(2\pi t\omega)$ .

Les opérateurs intégraux permettent donc de *sonder* dans quelle mesure une fonction  $f(x)$  ressemble aux différents représentants d'une famille de fonction  $g(x,y)$ . Le résultat de cette cartographie est la fonction  $F(y)$ .

### 6.1.3 Opérateurs intégraux

Parmi les familles de fonctions  $g(x,y)$  souvent utilisées pour sonder une fonction  $f$  nous pouvons citer :

- Les exponentielles complexes  $g(t,\omega) = e^{i\omega t}$ , c'est à dire des fonctions sinusoidales <sup>2</sup>  $g(t,\omega) = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$ . Il s'agit alors des transformées de Fourier qui font l'objet de ce chapitre.
- Les exponentielles  $g(t,s) = e^{st}$ . On parle alors de transformée de Laplace <sup>3</sup>.
- La fonction  $f(t)$  elle même mais décalé dans le temps, c'est à dire  $g(t,\tau) = f(t - \tau)$ . On parle alors d'autocorrélation.
- Une autre fonction quelconque du temps que l'on peut décaler dans le temps  $g(t,\tau) = g(t - \tau)$ . On parle alors de corrélation entre deux fonctions.

2. Le fait d'utiliser des nombres complexes permet de prendre en compte un éventuel déphasage entre la fonction sonde  $g(t,\omega)$  et la fonction à sonder  $f(t)$
3. On voit donc au passage que la transformée de Fourier est un cas particulier des transformées de Laplace

## 6.2 Série de Fourier

### 6.2.1 Définition

Le théorème de Fourier stipule que toute <sup>4</sup> fonction  $f(t)$  *périodique* peut être décomposée en une somme de fonctions trigonométriques.

Soit donc la fonction  $f(t)$  qui est périodique <sup>5</sup> sur l'intervalle  $0 \leq t \leq T$ , son développement en série de Fourier est alors :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) + B_n \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) \right] \quad \text{ecr. Maths} \quad (6.1)$$

ce qui peut se réécrire <sup>6</sup> aussi sous la forme :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t + \Phi_n) \quad \text{avec} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{ecr. Phys} \quad (6.2)$$

Revenons sur chacun des termes de cette expression :

4. Toute fonction "raisonnable", c'est à dire celle que l'on trouve en physique.
5. On pourrait aussi considérer une fonction périodique sur  $-T/2 < t < T/2$ , ce qui changerait légèrement la forme du développement en série de Fourier sans pour autant changer sa signification
6. Voir exercice 1.4. Via les formules de trigonométrie, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
 a_n \cos(n\omega t + \Phi_n) &= a_n \cos(n\omega t) \cos \Phi_n \\
 &\quad - a_n \sin(n\omega t) \sin \Phi_n
 \end{aligned}$$

On peut donc identifier :

$$A_n = a_n \cos \Phi_n \quad \text{et} \quad B_n = -a_n \sin \Phi_n$$

ou en inversant ces équations :

$$a_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \quad \text{et} \quad \tan \Phi_n = \frac{B_n}{A_n}$$

- $\omega$  est ici une pulsation en radian par seconde, car la grandeur  $t$  est en seconde. De façon générale, la décomposition de Fourier associée à la grandeur initiale, ici le temps, une grandeur réciproque. Si, par exemple, nous partons d'une fonction  $f(x)$  où  $x$  est une grandeur spatiale, on lui associera comme grandeur réciproque une fréquence spatiale, souvent notée  $k$ .
- $n\omega$  est appelée la fréquence de l'harmonique, elle est proportionnelle à la fréquence fondamentale obtenue pour  $n = 1$
- $\Phi_n$  est le déphasage de l'harmonique  $n$
- $a_n$  est l'amplitude de l'harmonique  $n$
- Les coefficients  $A_n$  et  $B_n$  sont une autre façon<sup>7</sup> d'écrire  $a_n$  et  $\Phi_n$ .
- La constante  $a_0$  est appelée la composante continue, elle correspond au cas  $n = 0$ , nous allons voir qu'elle correspond à la valeur moyenne d'où le nom de composante continue.

7. Ces sont les valeurs propres dans l'espace vectoriel de la décomposition en série de Fourier, voir plus bas

Les coefficients  $a_n$  et  $\Phi_n$  (ou  $A_n$  et  $B_n$ ) sont les paramètres qui définissent totalement le signal. Dit autrement, pour décrire la fonction  $f$ , on peut donner son évolution temporelle sur l'intervalle  $0 \leq t \leq T$  ou alors donner son spectre via l'ensemble des coefficients  $a_n$  et  $\Phi_n$ . Il s'agit de la même information concernant la fonction  $f$ , mais présentées différemment. En d'autres termes, il n'y a pas plus d'information en représentation fréquentielle que temporelle, cependant certaines informations sont parfois plus accessibles pour une représentation donnée.

### 6.2.2 Calcul des coefficients

La définition du développement en série de Fourier (eq 6.1 ou 6.2) permet facilement de passer de l'espace fréquentiel (si on suppose connus les coefficients  $a_n$  et  $\Phi_n$ ) vers la représentation temporelle du signal. Comment alors passer de la représentation temporelle à la représentation fréquentielle. Dit autrement, si  $f(t)$  est connue, comment obtenir les coefficients  $a_n$  et  $\Phi_n$  ?

Une étude plus attentive de l'écriture 6.1, nous montre que les fonctions sinus et cosinus (les termes  $\cos(n\omega t)$  et  $\sin(n\omega t)$ ) forment une base, au sens mathématique, sur laquelle on décompose la fonction  $f(t)$ .

**Encart 1 : Intégrale de fonction trigonométrique sur une période**

Rappelons que l'intégrale d'un sinus ou d'un cosinus sur un multiple de sa période est nulle :

$$\begin{aligned} \int_0^T \sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)dt &= \left[-\frac{T}{n2\pi} \cos n\frac{2\pi}{T}t\right]_0^T \\ &= -\frac{T}{n2\pi} \cos n\frac{2\pi}{T}T - \frac{T}{n2\pi} \cos 0 \quad (6.3) \\ &= \frac{T}{n2\pi} - \frac{T}{n2\pi} = 0 \end{aligned}$$

Alors qu'au contraire l'intégrale d'un cosinus ou un sinus au carré sur un multiple de sa période, n'est pas nulle :

$$\int_0^T \sin^2\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)dt = \int_0^T \frac{1}{2} \left(1 - \underbrace{\cos\left(2n\frac{2\pi}{T}t\right)}_{0, \text{ cf eq. 6.3}}\right) dt = \int_0^T \frac{1}{2} dt = \frac{T}{2}$$

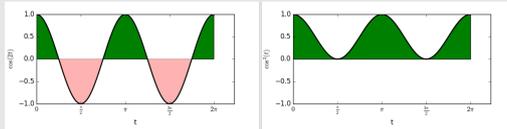


FIGURE 6.1: Illustration graphique. A gauche, pour  $\cos(2t)$ , sur un multiple de la période, les parties négatives en rouge pâle compensent les parties positives en vert foncé. Pour  $\cos^2(t)$ , il n'y a plus de compensation et l'intégrale n'est pas nulle.

En effet, considérons l'intégrale :

$$\int_0^T \sin(n\omega t) \cos(m\omega t) dt$$

Nous pouvons la définir, mathématiquement parlant, comme un produit scalaire<sup>8</sup> entre deux vecteurs  $n$  et  $m$  de la base. Nous pouvons la réécrire grâce aux formules trigonométriques :

$$\frac{1}{2} \int_0^T \sin((n+m)\omega t) dt + \frac{1}{2} \int_0^T \sin((n-m)\omega t) dt = 0$$

Les deux termes sous l'intégrale sont nuls car ils sont intégrés sur un multiple de leur période  $T$  (voir encadré 1).

En fait, en faisant varier les coefficients  $n$  et  $m$ , nous voyons que les seuls produits scalaires non nuls sont pour les cas particuliers<sup>9</sup>  $n = m$ .

En langage mathématique, on dit que toutes ces fonctions sont *orthogonales*, et plus précisément que l'ensemble des fonctions  $\sin(n\omega t)$  et  $\cos(n\omega t)$  forment une base<sup>10</sup> orthogonale pour les fonctions  $f(t)$  périodiques.

Nous pouvons donc maintenant calculer les coefficients  $A_n$  et  $B_n$ .

- Pour obtenir  $A_n$ , il faut donc projeter<sup>11</sup>  $f(t)$  sur le vecteur  $\cos(n\omega t)$

8. Un produit scalaire est une opération (une forme bilinéaire symétrique définie et positive) entre deux vecteurs conduisant à un scalaire.

9. Ce que nous pouvons résumer mathématiquement par :

$$\begin{aligned} \int_0^T \sin(n\omega t) \cos(m\omega t) dt &= 0 \\ \int_0^T \sin(n\omega t) \sin(m\omega t) dt &= \frac{T}{2} \delta_{nm} \quad (6.4) \\ \int_0^T \cos(n\omega t) \cos(m\omega t) dt &= \frac{T}{2} \delta_{nm} \end{aligned}$$

10. On peut faire l'analogie avec une base cartésienne qui sert à repérer un point  $M$  dans l'espace. On peut décomposer le vecteur  $\mathbf{OM}$  sur les 3 vecteurs de bases  $e_x, e_y$  et  $e_z$  :

$$\mathbf{OM} = xe_x + ye_y + ze_z$$

Ici,  $f(t)$  joue le rôle de  $\mathbf{OM}$ , les fonctions  $\cos(n\omega t)$  et  $\sin(n\omega t)$  jouent les rôles des vecteurs de la base  $\{e_x, e_y, e_z\}$  et les coefficients  $A_n$  et  $B_n$  jouent les rôles des coordonnées  $x, y, z$ . De plus, il faut aussi changer la définition du produit scalaire. De même que  $x = \mathbf{OM} \cdot e_x$ , nous avons ici, avec \* pour le produit scalaire,  $A_n = f(t) * \cos n\omega t$ .

11. i.e. effectuer un produit scalaire représenté par \*

$$A_n = f(t) * \cos(n\omega t) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\frac{2\pi}{T}t) dt \quad (6.5)$$

En effet, dans l'intégrale :

$$\int_0^T f(t) \cos(n\frac{2\pi}{T}t) dt$$

en développant  $f(t)$  en série de Fourier via la formule 6.1 tous les termes pour lesquels  $n \neq m$  sont nuls (cf orthogonalité de la base), et pour le terme  $n = m$ , l'intégrale vaut  $A_n T/2$ . Par conséquent, en divisant par  $T/2$ , on obtient bien  $A_n$ .

- De même, pour obtenir  $B_n$ , il faut donc projeter  $f(t)$  sur le vecteur  $\sin(n\omega t)$  :

$$B_n = f(t) * \sin(n\omega t) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\frac{2\pi}{T}t) dt \quad (6.6)$$

Le cas  $n = 0$  est un peu particulier. En effet, pour  $n = 0$ ,  $\sin(n\omega t) = 0$  et  $\cos(n\omega t) = 1$  Par conséquent le coefficient  $A_0$  s'écrit :

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

qui est la valeur moyenne de la fonction sur une période.

### 6.2.3 Exemples de décomposition

Appliquons ces méthodes pour calculer la décomposition en série de Fourier de signaux périodiques très souvent utilisés pour caractériser expérimentalement des systèmes.

*Signal carré* La fonction  $f(t)$  est alors définie par :

$$f_{\text{carré}}(t) = \begin{cases} a, & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ -a, & \text{si } \frac{T}{2} < t < T \end{cases} \quad (6.7)$$

Remarquons tout d'abord que la fonction est impaire, en effet  $f(t) = -f(t)$ .

Les coefficients  $A_n$  valent :

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f_{\text{carré}} \cos(n\frac{2\pi}{T}t) dt \\ &= \frac{2}{T} \left( \int_0^{\frac{T}{2}} a \cos(n\frac{2\pi}{T}t) dt + \int_{\frac{T}{2}}^T -a \cos(n\frac{2\pi}{T}t) dt \right) \end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{T} \left( \left[ a \frac{T}{n2\pi} \sin(n\frac{2\pi}{T}t) \right]_0^{\frac{T}{2}} + \left[ -a \frac{T}{n2\pi} \sin(n\frac{2\pi}{T}t) \right]_{\frac{T}{2}}^T \right) \\ &= \frac{2}{T} a \frac{T}{n2\pi} (\sin(n\pi) - 0 - (\sin n2\pi) + \sin(n\pi)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Nous voyons donc que les termes en cosinus d'une fonction impaire sont nuls. Ce résultat est généralisable.

Quant aux coefficients  $B_n$  :

$$B_n = \frac{2}{T} \left( \int_0^{\frac{T}{2}} a \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt + \int_{\frac{T}{2}}^T -a \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt \right)$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{T} \left( \left[ -a \frac{T}{n2\pi} \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) \right]_0^{\frac{T}{2}} + \left[ +a \frac{T}{n2\pi} \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) \right]_{\frac{T}{2}}^T \right) \\ &= \frac{a}{n\pi} \left( - \left[ \cos(n\pi) - \underbrace{\cos(0)}_1 \right] + \left[ \underbrace{\cos(2n\pi)}_1 - \cos(n\pi) \right] \right) \\ &= \frac{a}{n\pi} \left( 2 - 2 \underbrace{\cos(n\pi)}_{\substack{1 \text{ si } n \text{ est pair,} \\ -1 \text{ sinon}}} \right) \end{aligned}$$

Au total :

$$B_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{4a}{n\pi}, & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \quad (6.8)$$

On peut donc écrire le développement en série de Fourier de  $f_{\text{carré}}$  comme :

$$f_{\text{carré}}(t) = \frac{4a}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\sin\left((2p+1) \frac{2\pi}{T} t\right)}{2p+1} \quad (6.9)$$

L'accord <sup>12</sup> entre le signal carré et sa décomposition en série de Fourier est montrée sur la figure 6.2.

**Signal carré**

On retiendra qu'un signal carré ne contient que des harmoniques impaires et que celles-ci décroissent en  $1/n$ .

*Signal triangulaire* La fonction  $f_{\text{triangulaire}}(t)$  est périodique de période  $T$ , elle est définie par :

$$f_{\text{triangulaire}}(t) = \begin{cases} \frac{a}{T/4} t, & \text{si } 0 \leq t \leq T/4 \\ 2a - \frac{4a}{T} t, & \text{si } T/4 < t < 3T/4 \\ -4a + \frac{4a}{T} t, & \text{si } 3T/4 < t < T \end{cases} \quad (6.10)$$

La fonction est impaire donc les coefficients  $A_n$  sont nuls.

Les coefficients  $B_n$  valent :

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{T} \left( \int_0^{\frac{T}{4}} \frac{a}{T/4} t \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \left(2a - \frac{4a}{T} t\right) \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt \right. \\ &\quad \left. + \int_{\frac{3T}{4}}^T \left(-4a + \frac{4a}{T} t\right) \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt \right) \end{aligned}$$

12. Nous pouvons voir au passage la convergence infiniment lente de la série aux endroits de discontinuité de la fonction carré (cf Phénomène de Gibbs)

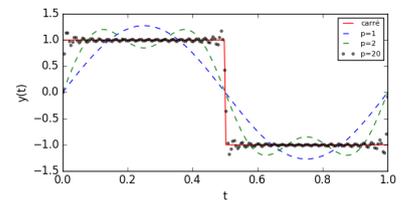


FIGURE 6.2: Développement en série de Fourier - Signal carré

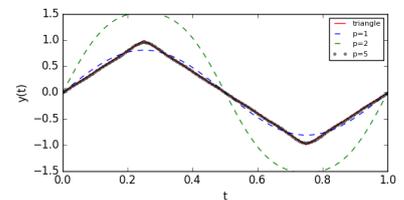


FIGURE 6.3: Développement en série de Fourier - Signal triangulaire

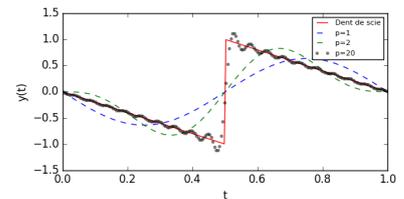


FIGURE 6.4: Développement en série de Fourier - Signal en dents de scie

Les intégrales se calculent par intégration par partie, le détail du calcul fait l'objet de l'exercice A.

Tout calcul fait, le développement en série de Fourier d'un signal triangulaire est :

$$f_{\text{triangle}} = \frac{8}{\pi^2} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\sin\left((2p+1)\frac{2\pi}{T}t\right)}{(2p+1)^2} \quad (6.11)$$

#### Signal triangulaire

On retiendra qu'un signal triangulaire ne contient que des harmoniques impaires et que celles-ci décroissent en  $1/n^2$ .

*Signal en dents de scie* Le calcul de ce développement fait l'objet de l'exercice A.

Tout calcul fait, le développement en série de Fourier d'un signal en dents de scie est :

$$f_{\text{dent de scie}} = \frac{2}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\sin\left(p\frac{2\pi}{T}t\right)}{p} \quad (6.12)$$

#### Signal en dents de scie

On retiendra qu'une rampe contient toutes les harmoniques et que celle-ci décroissent en  $1/n$

## 6.3 Transformée de Fourier

### 6.3.1 Écriture complexe des séries de Fourier

13. Avec cette écriture, la définition s'étend aux fonctions à valeurs complexes.

14. Dans le cas de l'équation 6.1, les termes  $n$  négatifs donneraient des termes en cosinus et sinus redondants

15.

$$C_n = \frac{A_n - iB_n}{2} \quad \text{et} \quad C_{-n} = \frac{A_n + iB_n}{2}$$

et donc :

$$A_n = C_n + C_{-n} \quad \text{et} \quad B_n = i(C_n - C_{-n})$$

et

$$a_0 = C_0$$

16. Notons que le produit scalaire est défini ici de façon légèrement différente. Noter la présence du signe moins dans la deuxième exponentielle

Nous voyons qu'il faut deux nombres réels ( $a_n$  et  $\Phi_n$  ou  $A_n$  et  $B_n$ ) pour décrire une harmonique dans la décomposition de Fourier. Nous pouvons donc utiliser pour cette même tâche un seul nombre complexe  $C_n$  au lieu de deux nombres réels. La décomposition en série de Fourier peut donc aussi s'écrire<sup>13</sup> :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{ni\frac{2\pi}{T}t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{ni\omega t} \quad (6.13)$$

Notons que ici la somme va de moins à plus l'infini<sup>14</sup>.

Nous pourrions trouver le lien<sup>15</sup> entre les  $\{A_n, B_n\}$  et les  $\{C_n\}$ , mais nous allons justifier l'équation 6.13 en montrant à nouveau que les fonctions  $e^{ni\omega t}$  sont orthogonales entre elles et forment une base sur laquelle on peut décomposer  $f(t)$ .

En effet, calculons le produit scalaire<sup>16</sup> entre les vecteurs  $e^{ni\omega t}$  et

$e^{pi\omega t}$  :

$$e^{ni\omega t} * e^{pi\omega t} = \int_0^L e^{ni\omega t} e^{-pi\omega t} dt = \frac{1}{i(n-p)\omega} [e^{i\omega(n-p)t}]_0^L \quad (6.14)$$

$$= 0 \quad \text{sauf si } n = p$$

car les valeurs de l'exponentielle valent 1 pour les deux limites. Si  $n = p$ , l'intégrale est simplement  $\int_0^L 1 \cdot dx = L$ . Nous avons donc :

$$e^{ni\omega t} * e^{pi\omega t} = \int_0^L e^{ni\omega t} e^{-pi\omega t} dt = L\delta_{np} \quad (6.15)$$

ce qui assure l'orthogonalité des vecteurs de la base.

Le coefficients  $C_n$  s'obtiennent donc en projetant la fonction  $f(t)$  sur les vecteurs  $e^{in\omega t}$  de la base :

$$C_n = f(t) * e^{in\omega t} = \frac{1}{T} \int_0^L f(t) e^{-in\omega t} dt \quad (6.16)$$

Notons au passage que si la fonction  $f(t)$  est réelle, ce qui est quasiment toujours le cas en physique, on a alors :

$$f(t) \in \mathbf{R} \Leftrightarrow C_{-n} = C_n^*$$

### 6.3.2 Des séries à la transformée de Fourier

Que faire si la fonction  $f(t)$  n'est pas périodique? Existe-t-il encore un développement en somme de fonctions trigonométriques ou de façon équivalente en somme d'exponentielles complexes? La réponse est oui et le raisonnement repose sur une astuce mathématique pouvant paraître spacieuse mais qui est tout à fait légitime.

En effet, on peut toujours dire qu'une fonction *non-périodique* est quand même périodique sur l'intervalle  $-T/2 \leq t \leq T/2$  pour peu que  $T \rightarrow \infty$ ! Cela peut sembler être de la triche, mais c'est mathématiquement correct. Voyons alors comment le développement en série de Fourier (eq 6.13) se modifie.

Repartons du développement<sup>17</sup> en série de Fourier sous forme exponentielle :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{ni\frac{2\pi}{T}t} \quad \text{avec } C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \exp^{-i\frac{2\pi}{T}t} dt \quad (6.17)$$

Définissons tout d'abord  $\omega_n \equiv n2\pi/T$ . L'intervalle entre deux valeurs successives  $d\omega_n$  vaut alors  $d\omega_n = 2\pi/T(dn)$  et comme  $(dn)$  vaut<sup>18</sup> 1, nous avons  $d\omega_n = 2\pi/T$ . Lorsque  $T \rightarrow \infty$ , nous voyons que  $d\omega_n$  devient de plus en plus petit, passant de valeur discrète lorsque la fonction est "vraiment" périodique, à une valeur *continue* dans le cas général. Importons le terme  $\omega_n$  dans le développement en série de Fourier, nous commençons par multiplier par  $(dn) = 1$  :

17. Les  $C_n$  sont évalués sur l'intervalle  $[-L/2, L/2]$  au lieu de  $[0, L]$  ce qui ne change rien en pratique.

18. l'intervalle entre deux nombres entiers successifs

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{ni\frac{2\pi}{T}t} (dn) \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{ni\frac{2\pi}{T}t} \frac{T}{2\pi} d\omega_n$$

Mais comme pour  $T \rightarrow \infty$ ,  $d\omega_n$  devient infinitésimalement petit, la somme se transforme en intégral :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( C_n \frac{T}{2\pi} \right) e^{ni\frac{2\pi}{T}t} d\omega_n \\ = \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega_n) e^{ni\frac{2\pi}{T}t} d\omega_n$$

où nous avons défini  $C(\omega_n) \equiv (T/2\pi)C_n$ . Nous pouvons alors utiliser cette définition pour calculer  $C(\omega_n)$  lorsque  $T \rightarrow \infty$  :

$$C(\omega_n) \equiv \frac{T}{2\pi} C_n = \frac{T}{2\pi} \cdot \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp^{-i\omega_n t} dt \\ = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp^{-i\omega_n t} dt$$

Arrivés à ce stade nous pouvons enlever l'indice  $n$ , qui n'a plus besoin d'être mentionné, et nous arrivons à la définition de la transformée de Fourier d'une fonction "physique"  $f(t)$  quelconque :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad \text{avec} \quad C(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \tag{6.18}$$

19. "TF" pour les intimes

On appelle donc  $C(\omega)$ , la transformée<sup>19</sup> de Fourier de la fonction  $f(t)$ .

La fonction  $C(\omega)$ , tout comme la décomposition en série de Fourier, nous indique à quel point la fonction  $f(t)$  est construite à partir de fonctions sinusoïdes écrites sous la forme  $e^{i\omega t}$ . Dit autrement, la valeur de  $C(\omega_0)$  nous dit à quel point la fonction  $f(t)$  a des fréquences dans la zone  $[\omega_0, \omega_0 + d\omega]$ . En langage plus courant, on dit que  $C(\omega)$  est le spectre de  $f(t)$ .

Trois remarques :

1. Les TF ne se limitent évidemment pas aux fonctions temporelles. La démarche est applicable pour n'importe quel signal. Par conséquent tout signal peut être analysé de façon équivalente dans l'espace où on effectue les mesures (comme l'espace temporel) ou dans un espace réciproque (comme l'espace fréquentiel)
2. La fonction  $C(\omega)$  est la TF de la fonction  $f(t)$ . Mais l'inverse est aussi vrai! La fonction  $f(t)$  est la transformée inverse de la fonction  $C(\omega)$ . En effet, les expressions des équations 6.18 sont symétriques à l'exception du signe moins et du facteur  $1/2\pi$ . Mais ces deux facteurs sont uniquement des questions de conventions. Pour le terme  $1/2\pi$ , on peut tout à fait le répartir en  $1/\sqrt{2\pi}$  sur chacun des deux termes. Pour le signe moins (i.e. celle appelée

TF inverse), ce n'est qu'une question de convention pour définir si c'est la transformation  $\omega \mapsto t$  ou la transformation  $t \mapsto \omega$  qui doit avoir le signe moins.

- Si nous comparons le développement en série (cf eq 6.17 p99) et la transformée de Fourier (cf eq 6.18), nous voyons que le développement en série n'est pas symétrique dans la mesure où la décomposition met en jeu une somme discrète alors que le calcul des coefficients utilise une intégrale. Cette dissymétrie est perdue dans le cas des transformées de Fourier où la décomposition et le calcul des coefficients mettent en jeu des intégrales.

### 6.3.3 Quelques propriétés de la transformation de Fourier

*Dans l'espace de Fourier, tout est inversé* De manière générale si une grandeur est importante dans un espace (par exemple temporel), elle sera petite dans l'espace réciproque (en l'occurrence fréquentiel).

$$f(a \cdot t) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} C\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Par exemple, si un signal temporel est court (une impulsion par exemple), son spectre sera large. A contrario, si un signal à une fréquence bien définie alors son signal temporel sera extrêmement long.

*Linéarité*

$$af_1(t) + bf_2(t) \leftrightarrow aC_1(\omega) + bC_2(\omega)$$

*Dérivation dans le domaine temporel*

$$f'(t) \leftrightarrow i\omega C(\omega)$$

20

*Dérivation dans le domaine fréquentiel*

$$tf(t) \leftrightarrow \frac{i}{2\pi} \omega C'(\omega)$$

*Produit*

$$(f_1 \cdot f_2)(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} ((C_1 \otimes C_2)(\omega))$$

où  $\otimes$  est le produit de convolution :

$$(C_1 \otimes C_2)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} C_1(\omega - x)C_2(x)dx$$

### 6.3.4 Transformations de Fourier de fonctions usuelles

*Fonction porte* La fonction porte est représentée sur la figure 6.5. Elle est définie<sup>21</sup> par  $f(x) = A$  pour l'intervalle  $-a \leq x \leq a$  et  $f(x) = 0$

20. Nous retrouvons ici, sous une forme un peu différente, ce que nous avons vu au chapitre 2 lorsque nous sommes "passés en complexe" pour étudier les équations différentielle en régime forcé. Imposer un régime permanent sinusoïdal à un système linéaire revient, mathématiquement, à prendre la transformée de Fourier de l'équation différentielle gouvernant le système.

21. Nous utilisons une grandeur spatiale  $x$ , la coordonnée réciproque est traditionnellement notée  $k$ , on parle alors de fréquence spatiale

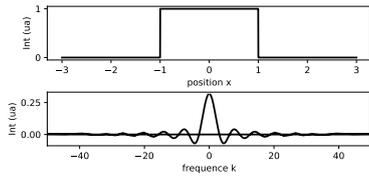


FIGURE 6.5: Transformée de Fourier d’une fonction porte. On peut faire le lien avec la figure de diffraction obtenue à l’infini par une fente.

22. Le champ électrique diffracté  $E(M)$  en un point  $M$  et se situant assez loin de l’objet diffractant pour être dans les conditions de Fraunhofer s’écrit :

$$E(X, Y) = Ke^{-i\omega t} \iint_{-\infty}^{\infty} t(x, y)e^{-iux} dx e^{-ivy} dy$$

où  $K$  est une constante,  $\omega$  la pulsation de l’onde plane monochromatique incidente,  $t(x, y)$  la fonction de transmission (éventuellement complexe) de l’objet diffractant,  $u = X/2\pi\lambda D$  et  $v = Y/2\pi\lambda D$  sont les fréquences spatiales de l’objet diffractant avec  $\lambda$  la longueur d’onde de la lumière incidente et  $D$  la distance entre l’objet diffractant et le point  $M$ .

Nous reconnaissons alors une transformée de Fourier à deux dimensions de la fonction transmittance  $t(x, y)$ . Les fréquences spatiales  $u$  et  $v$  jouent le même rôle qu’une fréquence temporelle (qui nous est plus familière).

23. La distribution de Dirac est aussi utile pour décrire des objets physiquement ponctuels comme par exemple la position d’un électron, où mathématiquement ponctuels comme une masse ponctuelle.

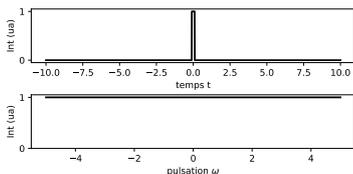


FIGURE 6.6: Transformée de Fourier d’une impulsion, le spectre est plat. En d’autres termes, une impulsion (infiniment courte) contient toutes les fréquences.

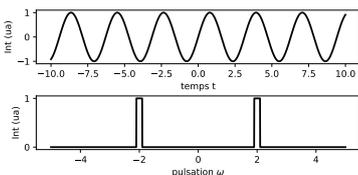


FIGURE 6.7: Module de la transformée de Fourier d’un sinus (la fonction est complexe).

ailleurs. Sa transformée de Fourier vaut donc :

$$\begin{aligned} C(k)_{\text{porte}} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a Ae^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{A}{-ik} e^{-ikx} \right]_{-a}^a \\ &= \frac{A}{2\pi} \frac{e^{-ika} - e^{ika}}{-ik} = \\ &= \frac{A \sin(ka)}{\pi k} \\ &= Aa \frac{\sin(ka)}{\pi ka} \equiv \frac{Aa}{\pi} \text{sinc}(ka) \end{aligned}$$

Nous voyons que la TF d’une fonction porte est égale à un sinus cardinal (voir fig 6.5). Cela n’est pas sans rappeler la figure d’interférence d’une fente. En effet, la transmission d’une fente est une fonction porte et sa figure de diffraction est un sinus cardinal au carré (car l’intensité est le carré du champ électrique). En fait, on montre que dans le cas de la diffraction<sup>22</sup> de Fraunhofer, la figure de diffraction est égale à la transformée de Fourier de la transmittance de l’objet diffractant.

Notons aussi au passage que numériser un signal revient à utiliser des fonctions portes dans le domaine temporel. Ainsi la fonction sinus cardinal joue un rôle très important dans le traitement du signal, notamment pour les algorithmes d’interpolation.

*Une impulsion* Une impulsion est mathématiquement représentée<sup>23</sup> par la distribution de Dirac notée traditionnellement  $\delta(x)$  et appelée "delta (de Dirac)". Sa définition est la suivante :

La fonction  $\delta$  prend une valeur infinie en 0, et la valeur zéro partout ailleurs. Son intégrale est égale à 1.

A vrai dire cette fonction n’est pas vraiment une fonction, mais plutôt une distribution.

Quoiqu’il en soit, il est toujours possible de calculer son spectre en prenant la TF.

$$\begin{aligned} C(\omega)_{\text{Impulsion}} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \underbrace{e^{-i\omega 0}}_{t=0} dt + \underbrace{0}_{t \neq 0} \\ &= 1 \cdot \frac{1}{2\pi} \end{aligned} \tag{6.19}$$

En d’autres termes, le spectre d’une impulsion infiniment courte contient toutes les fréquences à parts égales.

*Fonction sinus* La transformée de Fourier d’une fonction sinus se calcule facilement en utilisant la formule d’Euler :

$$\begin{aligned}
 C(\omega)_{\text{Sinus}} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\omega_0 t) e^{-i\omega t} dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}) e^{-i\omega t} dt \quad (6.20) \\
 &= \frac{1}{(2\pi)(2i)} (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))
 \end{aligned}$$

Une sinusoïde contient donc deux fréquences dont une des deux est négative et n'a qu'une signification mathématique<sup>24</sup>. Le terme  $i$  indique un déphasage de  $\pi/2$ .

Nous retrouvons donc bien que le signal ne possédant exactement qu'une seule fréquence (i.e. monochromatique) est une sinusoïde. Néanmoins, cette sinusoïde doit durer *éternellement* de  $t = -\infty$  à  $t = \infty$  : du début à la fin de l'univers. En pratique, un signal sinusoïdal est toujours borné dans le temps et son spectre n'est pas rigoureusement monochromatique. Le calcul du spectre d'une sinusoïde tronquée est exposé dans l'exercice A.

*Gaussienne* La transformée de Fourier d'une gaussienne est une gaussienne. Dit autrement, la gaussienne est invariante par transformée de Fourier.

*Une exponentielle décroissante* Soit la fonction  $f(t)$  décrivant une exponentielle décroissante comme nous avons pu l'étudier au chapitre 2 lors de l'étude d'un oscillateur harmonique amorti en régime pseudo-périodique :

$$f(t) = e^{-t/\tau} \sin \omega'_0 t \quad \text{pour } t \geq 0 \quad \text{et} \quad f(t) = 0 \quad \text{pour } t < 0 \quad (6.21)$$

Sa représentation fréquentielle est donnée<sup>25</sup> par sa TF :

$$C(\omega)_{\text{ExpDrec}} = \frac{1}{2\pi} \frac{\omega'_0}{1/\tau^2 + 2i\omega\tau - \omega^2 + \omega_0'^2} \quad (6.22)$$

Nous retrouvons l'expression<sup>26</sup> 2.7 de la page 32, pour l'évolution harmonique forcée d'un oscillateur amorti ! Dit autrement, l'évolution temporelle en régime libre de l'oscillateur contient déjà la courbe de résonance (en amplitude et en phase). Pour obtenir cette dernière il faut effectuer la transformée de Fourier de l'évolution temporelle (cf section 6.4.2).

### 6.4 Étude fréquentielle d'un système linéaire

NB : cette section peut-être passée à la première lecture. Elle prendra tout son sens après la lecture du chapitre 7.

24. Une transformée de Fourier décompose un signal en somme (infinie) d'exponentielles complexes de la forme  $e^{i\omega t}$ . Si on représente une exponentielle complexe au cours du temps, on obtient une spirale qui tourne dans le plan complexe. Une fréquence positive correspond à une spirale qui tourne dans le sens trigonométrique et une fréquence négative à une rotation dans le sens contraire

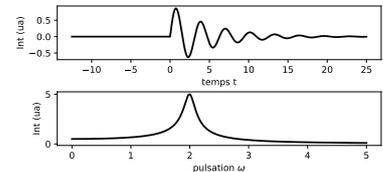


FIGURE 6.8: Module de la transformée de Fourier d'une sinusoïde exponentiellement amortie. On retrouve l'évolution fréquentielle de la courbe de résonance d'un oscillateur amorti.

25. Le détail du calcul fait l'objet de l'exercice A
26. Plus exactement pour retrouver l'expression 2.7, il faut se souvenir que la pseudo-pulsation  $\omega'_0$  des oscillations amorties n'est pas exactement la pulsation propre  $\omega_0$  de l'oscillateur. En effet,  $\omega_0'^2 = \omega_0^2 - 1/\tau^2$ , en faisant le remplacement, on retrouve bien l'équation 2.7

### 6.4.1 Décomposition en somme d'ondes planes harmoniques

Une des utilisations les plus importantes des transformées de Fourier est la décomposition d'un signal compliqué en une somme de signaux très simples. Dans le cas des ondes, les éléments de base de la décomposition sont les ondes planes harmoniques.

Soit donc un signal  $f(\mathbf{r}, t)$  représentant une onde, ou de façon plus générale une fonction ayant une dépendance temporelle et une dépendance spatiale (3D). Ce signal peut être décomposé en ondes planes en utilisant 4 transformations de Fourier :

- une pour le temps  $t$  avec la grandeur réciproque fréquentielle  $\omega$
- 3 pour l'espace  $\mathbf{r}$ , avec la grandeur réciproque, fréquence spatiale  $\mathbf{k}$ .

Ce que nous pouvons écrire :

$$f(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega) e^{i\omega t} d\omega \iiint_{-\infty}^{\infty} C(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3\mathbf{k} \quad (6.23)$$

27. Rappelons que :

$$C(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega t} dt$$

28. Rappelons que :

$$C(\mathbf{k}) = \iiint_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3\mathbf{r}$$

La fonction <sup>27</sup>  $C(\omega)$  est souvent appelée spectre en fréquence et correspond donc à une décomposition en fonction harmonique  $e^{i\omega t}$ .

La fonction <sup>28</sup>  $C(\mathbf{k})$  est souvent appelée spectre angulaire et rappelle ainsi la décomposition en onde plane où chaque vecteur  $\mathbf{k}$  correspond à une direction de l'espace où se propagerait un rayon dont les plans perpendiculaires à cette direction seraient les plans d'ondes (cf fig 7.3).

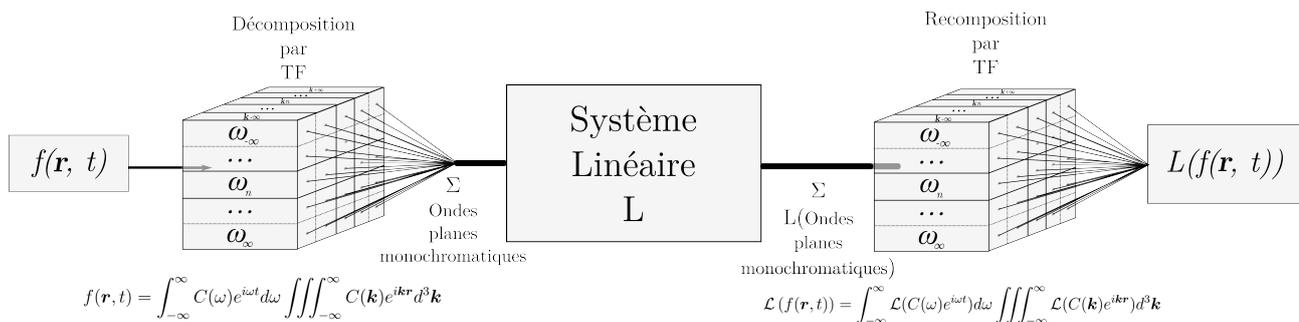


FIGURE 6.9: Illustration de la décomposition en ondes planes harmoniques par TF pour l'étude d'un système linéaire L.

Cette décomposition trouve tout son sens lors de l'étude d'un système linéaire  $\mathcal{L}$ . En effet, pour un tel système, la somme des réponses est égale à la réponse des sommes ou écrit mathématiquement  $\mathcal{L}(u_1 + u_2) = \mathcal{L}(u_1) + \mathcal{L}(u_2)$ . Ainsi plutôt que de chercher la réponse du système linéaire  $\mathcal{L}$  à une fonction  $f(\mathbf{r}, t)$ , ce qui peut être compliqué voire impossible, il est beaucoup plus facile de chercher la réponse du système  $\mathcal{L}$  à une onde plane quelconque et recomposer ensuite la réponse du système comme une somme de réponses de  $\mathcal{L}$

à chaque onde plane. Mathématiquement, en écriture symbolique :

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}, t) &= \sum \text{Ondes Planes Monochromatiques} \\ &\Leftrightarrow \mathcal{L}(f(\mathbf{r}, t)) \\ &= \sum \mathcal{L}(\text{Ondes Planes Monochromatiques}) \end{aligned}$$

où la somme  $\sum$  devrait être remplacée par les intégrales de l'équation 6.23.

C'est pour cette raison que les ondes planes harmoniques prennent une place si importante dans les ouvrages de physique : si nous connaissons la réponse d'un système linéaire pour une onde plane harmonique quelconque, alors nous connaissons la réponse du système pour n'importe quel signal, il suffit d'appliquer la méthode décrite dans cette section et schématisée sur la figure 6.9.

### 6.4.2 Caractérisation expérimentale

Caractériser un système linéaire est donc connaître sa réponse pour chaque pulsation  $\omega$ . Expérimentalement, deux méthodes peuvent être utilisées.

*Approche fréquence par fréquence* C'est l'approche utilisée par exemple en électronique pour tracer un diagramme de Bode. On envoie méthodiquement au système linéaire des signaux sinusoïdaux de pulsation  $\omega$  dont on fait varier la pulsation  $\omega$  sur la gamme de fréquence que l'on veut caractériser.

D'un point de vue plus théorique, c'est aussi l'approche que nous avons implicitement choisie pour l'étude d'un système linéaire en régime forcé (cf section 2.3 p28).

*Approche par la réponse impulsionnelle* On excite le système avec une impulsion extrêmement courte temporellement et on enregistre sa réponse temporelle. Il suffit alors de prendre la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle pour obtenir les mêmes informations que celles par l'approche fréquence par fréquence.

Cette méthode se comprend intuitivement en se souvenant qu'une impulsion temporelle contient toutes les fréquences à parts égales. Par conséquent, lorsque nous soumettons le système linéaire à une impulsion nous testons en fait *toutes les fréquences à la fois*.

## 6.5 Comment réaliser une TF

### 6.5.1 Un exemple de réalisation mécanique : l'oreille

Notre oreille interne renferme une cavité en forme d'escargot appelée cochlée qui a pour but de transformer un son en signal électrique interprétable par le cerveau.



FIGURE 6.10: Image au microscope électronique à balayage de cochlée de chinchilla (un petit rongeur). Image de la totalité de la cochlée. Crédit : Université de Toronto (SickKids)

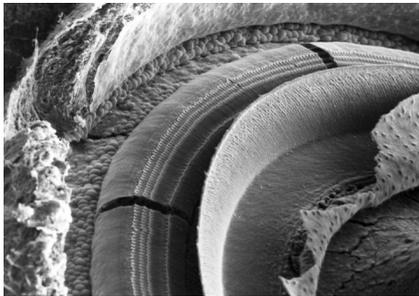


FIGURE 6.11: Agrandissement permettant de distinguer les lignes régulières de cellules ciliées. En bas, un agrandissement encore plus grand permet de voir une seule ligne de cellules ciliées.

29. La carte "fréquence de résonance-position" est décrite empiriquement mais assez qualitativement par la fonction de Greenwood

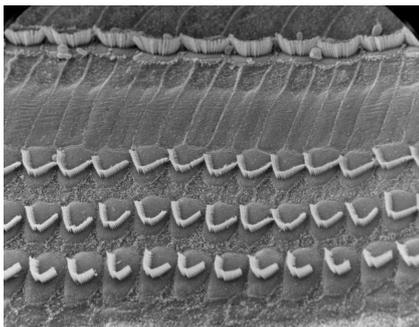


FIGURE 6.12: Agrandissement encore plus grand permettant de voir une seule ligne de cellules ciliées.

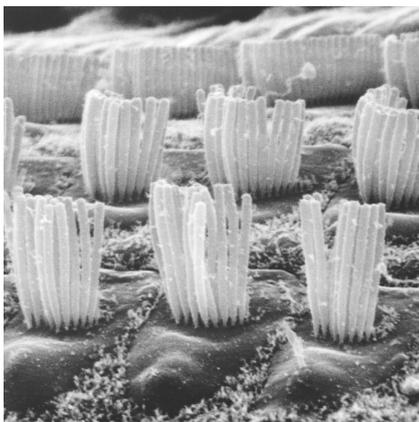


FIGURE 6.13: Agrandissement permettant de voir un ensemble de cellules ciliées

Ce système ne fonctionne pas comme la membrane d'un micro qui transmettrait le son au cerveau sous une forme temporelle (comme une courbe affichée sur un oscilloscope par exemple). Il transmet au contraire le signal sous forme de spectre fréquentiel. Il réalise donc mécaniquement une transformée de Fourier du signal sonore incident.

L'onde sonore est détectée au niveau de l'oreille moyenne par le tympan qui joue le rôle de membrane et auquel est attaché un jeu d'ossetlets (le marteau, l'enclume et l'étrier) qui amplifie l'onde et la transmet vers l'oreille interne. L'oreille interne est remplie d'un liquide, l'endolymphe, et se termine par la cochlée dans laquelle baignent des cellules ciliées.

Au nombre d'environ 3500, les cellules ciliées ont des fréquences de résonances bien précises<sup>29</sup>. Les cellules ciliées à l'entrée de la cochlée ont une faible masse et une raideur importante, elles ont donc des fréquences de résonance hautes. A contrario, les cellules ciliées au fond de la cochlée ont une masse plus importante et une raideur bien plus faible et résonnent donc aux basses fréquences.

Lorsqu'un signal sonore arrive au niveau de la cochlée, seules les cellules ciliées en résonance avec les fréquences du signal rentrent en vibration. Les cellules ciliées concernées envoient un signal nerveux via le nerf auditif pour indiquer au cerveau que le signal sonore contient une fréquence autour de sa fréquence de résonance.

Le temps d'intégration du signal sonore est de l'ordre de 30 millisecondes.

### 6.5.2 L'algorithme de transformée de Fourier rapide (FFT)

L'algorithme de Transformée de Fourier Rapide (FFT en anglais), développé indépendamment par James Cooley et John Tukey en 1965 est l'un des algorithmes les plus importants du siècle dernier.

Il présuppose une numérisation du signal. Une fois le signal numérisé, l'intégrale de la TF devient une somme discrète car d'une part, numériser un signal réduit sa bande passante et l'intégrale ne va plus jusqu'à plus l'infini et d'autre part, du fait du nombre fini d'échantillons initiaux, il n'y a qu'à calculer la valeur en fréquence qu'en un nombre limité de points (cf annexe A). L'application directe de la formule donne un algorithme dit en  $O(n^2)$ , c'est à dire que le temps de calcul croît comme le carré du nombre de point à calculer pour la TF.

Le principe de la FFT est de subdiviser la TF initiale en TF de plus petite taille. L'algorithme passe alors à une complexité en  $O(n \ln n)$ . Cela peut sembler de prime abord peu différent d'une complexité en  $O(n^2)$ , mais grâce à cette modification un calcul qui prenait 1 semaine prend alors 30 secondes.

L'algorithme est relativement court et sous une forme condensée

prend moins de 50 lignes de code.

## 6.6 TD 6

### Questions de cours

1. Redonner l'expression d'un développement en série de Fourier (écriture "mathématique" et "physique").
2. Comment est défini le produit scalaire entre un des vecteurs de type  $\cos n\omega t$  et une fonction  $f(t)$  de période  $T = 2\pi/\omega$ ? Que vaut ce produit scalaire?
3. Comment utiliser un développement en série de Fourier pour montrer que toute onde sur une corde de longueur finie peut s'écrire comme la somme d'ondes stationnaires?
4. Quelle est la transformée de Fourier d'une fonction porte?
5. Décomposer une fonction quelconque  $f(x, t)$  dépendant d'une composante spatiale  $x$  et du temps  $t$ , en somme d'ondes planes harmoniques à l'aide d'intégrales traduisant mathématiquement une transformée de Fourier.

### Développement en série de Fourier d'un signal triangulaire

Un signal triangulaire  $f_{\text{triangle}}(t)$  de période  $T$  est défini par :

$$f_{\text{triangle}}(t) = \begin{cases} \frac{a}{T/4}t, & \text{si } 0 \leq t \leq T/4 \\ 2a - \frac{4a}{T}t, & \text{si } T/4 < t < 3T/4 \\ -4a + \frac{4a}{T}t, & \text{si } 3T/4 < t < T \end{cases} \quad (6.24)$$

Calculer son développement en série de Fourier.

### Développement en série de Fourier d'un signal en dent de scie

Un signal triangulaire  $f_{\text{dent de scie}}(t)$  de période  $T$  est défini par :

$$f_{\text{Dent de scie}}(t) = \begin{cases} \frac{2a}{T}t, & \text{si } T/2 \leq t \leq T \end{cases} \quad (6.25)$$

Calculer son développement en série de Fourier.

### TF d'un cosinus

Soit un signal  $f(t) = \cos \omega_0 t$  représentant un cosinus idéal c'est-à-dire allant temporellement de  $t \in [-\infty, \infty]$ .

1. Quelle est sa transformée de Fourier?
2. En quoi cette TF diffère-t-elle de celle d'un sinus?

*TF d'une sinusoïde tronquée*

Soit un signal représentant une sinusoïde tronquée dans le temps c'est à dire :

$$f_{\text{sinus tronqué}}(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < -t_f \\ \sin \omega_0 t, & \text{si } t_f 0 \leq t \leq t_f \\ 0, & \text{si } t > t_f \end{cases} \quad (6.26)$$

1. Quelle est sa transformée de Fourier ?
2. Interpréter ce résultat en terme de convolution entre la fonction sinus et la fonction porte.

*TF d'une oscillation exponentiellement amortie*

Soit la fonction  $f(t) = \exp(-t/\tau) \sin \omega_0 t$ , souvent rencontrée en physique car elle décrit les oscillations d'un oscillateur amorti.

1. Quelle est sa transformée de Fourier ? Vérifier que l'on retrouve bien l'expression 2.7 de la page 32, pour l'évolution harmonique forcée d'un oscillateur amorti.
2. Une fonction lorentzienne  $L(x)$  est définie par :

$$L(x) = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\Gamma\right)^2 + (x - x_0)^2} \quad (6.27)$$

Montrer que le module de la TF calculée précédemment est une lorentzienne.

3. Dans des conditions expérimentales bien particulière il est possible de mesurer ce que l'on appelle la *largeur naturelle* d'une raie spectrale. Le spectre d'une raie d'une lampe spectrale (comme la raie verte de la lampe mercure par exemple) a alors profil lorentzien. A partir de cette constatation expérimentale quelle modèle simple pour l'atome pourrait-on donner pour expliquer l'émission de cette lumière ?

## 6.7 CQFR

### *Connaissances*

1. Un signal périodique de période  $T$  peut être décomposé en une somme infinie de fonctions harmoniques de la forme  $\cos n(2\pi/T)t$  et  $\sin n(2\pi/T)t$ . Plus précisément, ces fonctions forment une base sur laquelle on peut décomposer la fonction périodique.
2. Toute fonction peut être décomposée en une somme continue de fonctions harmoniques grâce à la transformée de Fourier.
3. L'utilisation d'ondes planes harmoniques associées à la transformée de Fourier est un outil indispensable pour l'étude des systèmes linéaires.

### *Savoir-faire*

1. Savoir calculer le développement en série de Fourier de fonctions simples.
2. Savoir calculer la transformée de Fourier de fonctions simples.
3. Savoir décomposer une fonction quelconque en somme d'ondes planes harmoniques (connaître l'intégrale associée).





## 7 Ondes propagatives

NOUS AVONS ABOUTI au chapitre 4 et 5 à plusieurs reprises et dans différent domaine de la physique à une équation d'onde. Plus précisément, au chapitre 4, nous sommes parti d'un modèle microscopique, i.e. une chaîne d'oscillateurs harmoniques couplés et dans le chapitre 5 nous sommes partis de modèle macroscopique où nous avons réalisé des bilans microscopiques. Dans les deux cas, nous avons aboutis à une équation d'onde, typiquement celle de d'Alembert. Il est maintenant temps d'étudier leur solutions et voir pourquoi elles sont qualifiées d'ondes

Parmi ces solutions, aussi appelées ondes planes, nous allons distinguer en particulier les *ondes planes monochromatiques*. Ces dernières font apparaitre très clairement deux périodicités l'une temporelle et l'autre spatiale. Nous avons vu au chapitre 6 que ces ondes jouent le rôle de briques de base<sup>1</sup> avec lesquelles on peut construire n'importe quelle onde.

Nous aborderons ensuite rapidement le cas peut-être plus intuitif des ondes sphériques.

Nous finirons enfin le chapitre avec la notion parfois un peu obscure d'impédance d'un milieu et plus précisément d'impédance propagative. Nous verrons que cette quantité permet de relier mathématiquement les deux grandeurs qui se propagent au sein de la relation de structure.

### 7.1 Les solutions de l'équation d'onde de d'Alembert

#### 7.1.1 Les solutions : les ondes planes

Redonnons à nouveau l'équation d'onde de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 \zeta(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \zeta(x, t)}{\partial x^2} \quad (7.1)$$

Nous cherchons donc une fonction dont la double dérivée temporelle est égale à la double dérivée spatiale compte tenu d'un facteur  $c^2$ .

### Sommaire

7.1 Sol. eq. d'Alembert. . . . .	111
7.2 Onde progressive plane et harmonique . . . . .	114
7.3 Ondes sphériques . . . . .	117
7.4 L'impédance propagative . . .	118
7.5 Aspect énergétique. . . . .	121
7.6 TD7 . . . . .	122
7.7 CQFR . . . . .	124

1. Tout comme l'oscillateur harmonique sert de brique de base pour décrire n'importe quelle vibration

Cela peut sembler assez restrictif à première vue. En fait il n'est en rien car *toutes* les fonctions pouvant s'écrire :

$$a(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) \quad (7.2)$$

2. La décomposition en  $f + g$  est pratique pour travailler en fonction de  $x$  à  $t$  fixé alors que la décomposition en  $\psi + \Phi$  est pratique pour travailler en fonction de  $t$  à  $x$  fixé.

ou aussi bien<sup>2</sup> :

$$a(x, t) = \psi(t - x/c) + \Phi(t + x/c) \quad (7.3)$$

sont solutions de l'équation 7.1. Ces solutions sont appelées *ondes planes* et nous verrons à la section 7.2.1 la raison de cette appellation.

#### Encart 1 : Dérivation temporelle et spatiale d'une onde plane

Nous allons utiliser très souvent les dérivées de spatiales et temporelles d'onde plane.

Soit donc une onde plane :

$$a(x, t) = f(x \pm ct)$$

Il s'agit d'une fonction composée.

Posons au préalable :

$$u = x - ct$$

Utilisons alors la dérivation de fonctions composées :

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial f(u)}{\partial x} = \frac{df}{du} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{du} \quad \text{car} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 1$$

et

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{\partial f(u)}{\partial t} = \frac{df}{du} \frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{df}{du} \quad \text{car} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -c$$

Nous voyons alors que :

$$\frac{\partial a}{\partial x} = -c \frac{\partial a}{\partial t} \quad (7.4)$$

En résumé :

- Lorsque nous écrivons une onde plane sous la forme :

$$a(x, t) = f(x \pm ct)$$

alors nous avons la relation :

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \pm c \frac{\partial a}{\partial t} \quad (7.5)$$

- Lorsque nous écrivons une onde plane sous la forme :

$$a(x, t) = f\left(t \pm \frac{x}{c}\right)$$

alors nous avons la relation :

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \pm c \frac{\partial a}{\partial x} \quad (7.6)$$

Vérifions que les solutions proposées en 7.2, satisfont l'équation de

d'Alembert. Comme cette dernière est linéaire il suffit de vérifier séparément  $f(x - ct)$  puis  $g(x + ct)$ . Posons au préalable  $u = x - ct$

$$\frac{\partial^2 f(x - ct)}{\partial t^2} \stackrel{?}{=} c^2 \frac{\partial^2 f(x - ct)}{dx^2}$$

$$(-c)^2 \frac{d^2 f(x - ct)}{du^2} \stackrel{\text{oui}}{=} c^2 \times (1)^2 \frac{d^2 f(x - ct)}{du^2}$$

où nous avons utilisé les résultats exposés dans l'encart 1. La démonstration est la même pour  $g(x + ct)$ .

Les solutions peuvent donc avoir une forme arbitraire tant qu'elles peuvent s'écrire  $f(x - ct)$  et/ou  $g(x + ct)$ . Elles n'ont pas, de près ou de loin, besoin d'être sinusoïdale.

### 7.1.2 Propagation des ondes planes

Voyons maintenant un peu plus en détail ce qu'implique une fonction de la forme  $a(x, t) = f(x - ct)$ . Considérons par exemple l'amplitude à l'abscisse  $x$  d'une corde en fonction du temps. Le déplacement vertical de la corde vaut  $a(x, t)$  ce que l'on peut réécrire astucieusement :

$$a(x, t) = f(x - ct) = f(0 - c(t - \frac{x}{c})) = a(0, t - \frac{x}{c}) \quad (7.7)$$

Le déplacement de la corde à l'abscisse  $x$  à l'instant  $t$  est le même que celui à l'abscisse  $x = 0$  mais il y a  $t - x/c$  secondes. L'amplitude de la corde (i.e. le signal) en  $x = 0$  et au temps  $t - x/c$  s'est donc propagée dans le sens des  $x$  positifs jusqu'à l'abscisse  $x$  au temps  $t$  (cf fig 7.1).

De même supposons connue la forme  $a(x, 0)$  de la corde à l'instant  $t = 0$  (en pointillés sur la figure 7.2). A l'aide d'une autre écriture astucieuse :

$$a(x, t) = f(x - ct) = f((x - ct) - 0) = a(x - ct, 0)$$

On voit que le signal en  $x$  au temps  $t$  est le même que celui qu'il était à  $t = 0$  mais à la position  $x - c/t$ . A nouveau il y a propagation vers les  $x$  positifs.

Nous pouvons résumer ces deux jeux d'écriture par l'égalité suivante qui traduit la propagation d'une onde plane :

$$f(x_0 - ct_0) = f((x_0 + c\Delta t) - (t_0 + c\Delta t)) \quad (7.8)$$

qui s'interprète ainsi, l'onde en  $x_0$  et au temps  $t_0$ , est la même qu'elle sera<sup>3</sup> en  $x_0 + c\Delta t$  et au temps  $t_0 + c\Delta t$ .

Ainsi une onde de la forme  $a(x, t) = f(x - ct)$  représente la propagation sans déformation<sup>4</sup> d'un signal de vitesse  $c$  dans le sens des  $x$  croissants. Idem pour  $g(x + ct)$  mais dans le sens des  $x$  décroissants.

L'exercice 8.4 permet de se familiariser avec ces concepts.

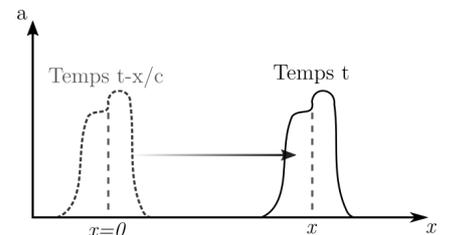


FIGURE 7.1: Illustration de la propagation d'une fonction de la forme  $f(x - ct)$ .  $a(x, t) = a(0, t - \frac{x}{c})$

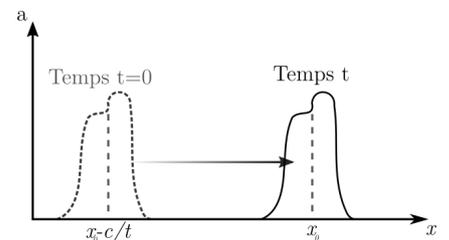


FIGURE 7.2: Illustration de la propagation d'une fonction de la forme  $f(x - ct)$ .  $a(x, t) = a(x - ct, 0)$

3. ou qu'elle fut si  $\Delta t < 0$

4. Cela est dû au caractère non dispersif du milieu (cf section 7.2.4 et chapitre 10)

5. On pourrait aussi utiliser les ondes sphériques.

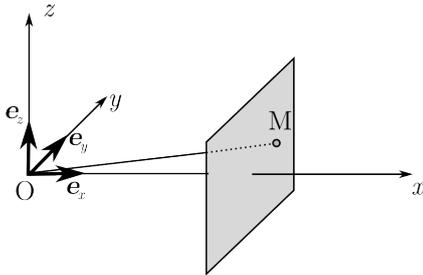


FIGURE 7.3: Onde plane 1D. Tous les points M du plan ont le même état de vibration

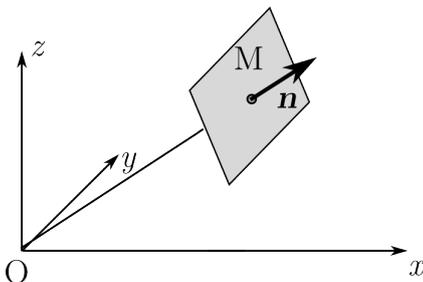


FIGURE 7.4: Onde plane 3D. Tous les points M du plan repéré par le vecteur  $\mathbf{n}$  ont le même état de vibration

6. C'est-à-dire une fonction harmonique ne contenant qu'une seule fréquence où dit autrement une fonction dont le développement en série de Fourier (cf chap 6) ne contient qu'une composante

## 7.2 Les ondes progressives planes et harmoniques

Parmi toutes les solutions possibles<sup>5</sup> de la forme  $f(x - ct)$ , nous allons nous intéresser à une sous-famille aux propriétés particulièrement intéressantes : les ondes planes et harmoniques. Revenons tout d'abord sur la notion d'onde plane.

### 7.2.1 Onde progressive plane

Revenons à une fonction de la forme  $f(x - ct)$  qui est donc solution de l'équation de d'Alembert. Pour un temps  $t$  donné, c'est à dire si on fige par la pensée le temps, la fonction  $f$  est constante pour tous les points où  $x = cte$ . Ces points définissent un plan, d'où le nom d'onde plane (cf fig ??).

Il est alors possible de généraliser le concept d'onde plane à 3 dimensions. En effet, une onde plane se dirigeant selon  $Ox$  s'écrit  $f(x - ct)$ . Dans cette expression,  $x$  représente la composante du vecteur position  $\mathbf{OM}$  sur l'axe  $x$  repéré par le vecteur  $\mathbf{e}_x$ . Nous avons donc  $x = \mathbf{OM} \cdot \mathbf{e}_x$  de telle sorte que l'onde plane peut aussi s'écrire :

$$f(x - ct) = f(\mathbf{OM} \cdot \mathbf{e}_x - ct)$$

Or, à 3 dimensions, rien n'empêche l'onde plane  $f(x, y, z, t)$  de se propager dans une direction autre que  $Ox$ . Pour une direction de propagation quelconque indiquée par le vecteur unitaire  $\mathbf{n}$  (cf fig 7.4), l'onde plane peut s'écrire :

$$f(x, y, z, t) = f(\mathbf{OM} \cdot \mathbf{n} - ct)$$

soit :

$$f(x, y, z, t) = f(\alpha x + \beta y + \gamma z - ct)$$

où  $(\alpha, \beta, \gamma)$  sont les composantes de  $\mathbf{n}$ .

### 7.2.2 Onde progressive plane et harmonique

Parmi la famille des fonctions pouvant être écrites sous la forme d'une onde plane  $f(x - ct)$ , existe-il des fonctions dont la dépendance temporelle peut se mettre sous la forme d'une sinusoïde<sup>6</sup> ?

Cherchons la forme que devrait prendre  $f$  pour être sinusoïdale tout en étant solution de l'équation de d'Alembert. Soit une onde dont la dépendance temporelle est sinusoïdale et sous la forme complexe :

$$\underline{a}(x, t) = \underline{A}(x)e^{i\omega t}$$

où  $\underline{A}(x)$  est une fonction de l'espace a priori quelconque.

Injectons cette expression dans l'équation d'onde de d'Alembert 7.1 :

$$-\omega^2 \underline{A}(x)e^{i\omega t} = c^2 e^{i\omega t} \frac{d^2 \underline{A}}{dx^2}$$

soit :

$$\frac{d^2 \underline{A}}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \underline{A}(x) = 0$$

Ce qui est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique et dont la solution générale pour  $\underline{A}(x)$  se met sous la forme :

$$\underline{A}(x) = \underline{a}_1 e^{i(\omega/c)x} + \underline{a}_2 e^{-i(\omega/c)x}$$

et donc :

$$\underline{a}(x, t) = \underline{a}_1 e^{i(\omega t + (\omega/c)x)} + \underline{a}_2 e^{i(\omega t - (\omega/c)x)}$$

Puis en notation réelle :

$$a(x, t) = a_1 \cos(\omega t - \frac{\omega}{c}x + \Phi_p) + a_2 \cos(\omega t + \frac{\omega}{c}x + \Phi_r)$$

Le premier terme correspond bien à une onde plane progressive (du type  $f(t - x/c)$ ) sous forme sinusoïdale et le second à une même onde mais régressive.

Posons alors :

$$k = \frac{\omega}{c} \tag{7.9}$$

Nous avons donc la forme que doit prendre une onde plane progressive et harmonique (OPPH) :

Onde plane progressive et harmonique (OPPH)

$$a_{\text{OPPH}}(x, t) = a \cos(\omega t - kx + \Phi) \tag{7.10}$$

où de façon équivalente en écriture complexe<sup>7</sup> :

OPPH écriture complexe

$$a_{\text{OPPH}}(x, t) = a e^{i(\omega t - kx)} e^{i\Phi} \tag{7.11}$$

7. On trouve plusieurs conventions de signe pour l'écriture en notation complexe. Dans certains ouvrages l'onde en notation complexe s'écrit :

$$a_{\text{OPPH}}(x, t) = a e^{i(kx - \omega t)} e^{i\Phi}$$

A 3 dimensions les OPPH s'écrivent :

OPPH 3Ds

$$a_{\text{OPPH}}(x, t) = a \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \Phi) \tag{7.12}$$

### 7.2.3 Périodicités spatiale et temporelle

L'expression d'une OPPH met en avant deux périodicités :

- **UNE PÉRIODICITÉ TEMPORELLE** : Si nous figeons l'espace (c'est à dire par exemple que l'on reste en un même point de l'espace) l'onde OPPH est périodique au cours du temps avec une période  $T$  ou de façon équivalente avec une pulsation  $\omega = 2\pi/T$ .
- **UNE PÉRIODICITÉ SPATIALE** : Si nous figeons le temps (en prenant une photo par exemple), l'onde OPPH présente une périodicité spatiale de période  $\lambda$  ou de façon équivalente avec une "pulsation spatiale"  $k = 2\pi/\lambda$  que l'on appelle plutôt vecteur d'onde.

### 7.2.4 La relation de dispersion

L'équation 7.9 :  $k = \omega/c$  peut sembler anodine. Elle est en fait capitale. Elle relie la périodicité spatiale et la périodicité temporelle. Cette équation est appelée *relation de dispersion* et donne des informations cruciales sur la propagation d'une onde dans un milieu.

Une façon systématique d'obtenir la relation de dispersion est d'injecter une OPPH sous forme complexe dans l'équation d'onde. Pour l'équation d'onde de d'Alembert 7.1, Nous obtenons :

$$-\omega^2 a e^{i(\omega t - kx)} e^{i\Phi} = c^2 k^2 a e^{i(\omega t - kx)} e^{i\Phi}$$

soit :

Relation de dispersion (non dispersif)

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad \text{pour un milieu non dispersif} \quad (7.13)$$

Nous avons vu que les solutions de l'équation de d'Alembert, à savoir des sommes d'ondes planes ayant la même vitesse de propagation  $c$ , se propagent sans déformation. Nous pouvons alors considérer la relation de dispersion 7.13 comme une signature d'une propagation sans atténuation ni déformation des ondes. Plus précisément, nous qualifierons au chapitre 10 les milieux de propagation décrits par l'équation de d'Alembert comme *non dispersifs*. Nous montrerons que ces milieux non dispersifs sont des cas particuliers. Dans le cas général, la relation de dispersion nous indiquera que la vitesse d'une onde plane dans le milieu considéré dépend de sa pulsation.

Une erreur courante<sup>8</sup> est de considérer la relation  $k = \omega/c$ , ou de façon équivalente  $\lambda = cT$ , comme systématique alors qu'il s'agit en fait d'un cas particulier. Donnons tout de suite quelques contre-exemples :

8. Qui est due principalement à deux choses. D'une part, les ondes sonores, auxquelles nous sommes exposés tous les jours, qui se propagent dans l'air qui n'est pas un milieu dispersif (dans la gamme audible). D'autre part, la plupart des cours introductifs sur les ondes, notamment dans le secondaire, ne peuvent aller plus loin que les milieux non dispersifs et passent sous silence la subtile complexité de la relation  $\lambda = cT$ .

9. Si  $E$  est considéré très faible, on retrouve la relation de dispersion d'un milieu non dispersif.

- Pour une corde vibrante, avec une raideur, de module d'Young  $E$  et de moment d'inertie  $I$ , la relation de dispersion<sup>9</sup> est donnée par :

$$\mu \omega^2 = T_0 k^2 + EIk^4$$

- Pour des ondes de surface (une onde sur une flaque d'eau par exemple) avec un coefficient de tension superficielle  $\alpha$  :

$$\omega^2 = \left( gk + \frac{\alpha k^3}{\rho} \right) \tanh(kh)$$

- Pour une onde lumineuse (donc électromagnétique) se propageant dans un milieu d'indice optique<sup>10</sup>  $n(\omega)$  :

$$k = n(\omega) \frac{\omega}{c}$$

10. Avec par exemple pour la propagation dans le verre la loi empirique de Cauchy :

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^3}$$

### 7.2.5 Propriétés

*Décomposition en ondes planes et harmoniques* Nous avons vu à la section 6.4.1 que tout signal peut être décomposé en une somme d'ondes

planes monochromatiques.

La décomposition est double :

- UNE DÉCOMPOSITION SPECTRALE : Un signal polychromatique, périodique ou non, quelque soit son spectre, peut être décomposé<sup>11</sup> en une somme de signaux harmoniques.
- UNE DÉCOMPOSITION SPATIALE : N'importe quelle onde, quelque soit sa géométrie (une explosion, une onde convergente, un faisceau parallèle, ...), peut être décomposée<sup>12</sup> en une somme d'ondes planes.

11. C'est une démarche assez naturelle car c'est comme cela que fonctionnent nos oreilles pour le son et nos yeux pour la couleur de la lumière.

12. C'est la démarche que l'on utilise par exemple implicitement en optique géométrique où les faisceaux sont les droites perpendiculaires au plan d'onde. Chaque faisceau est implicitement une des ondes planes permettant de décomposer l'onde lumineuse.

*Résolution des équations différentielles* La dérivée spatiale et temporelle d'une OPPH est une opération particulièrement simple à effectuer :

$$\frac{\partial a}{\partial t} = i\omega a \quad \text{et} \quad \frac{\partial a}{\partial x} = -ika \tag{7.14}$$

Par conséquent, l'utilisation d'OPPH (en écriture complexe) transforme l'équation aux dérivées partielles en équations algébriques, en général facile à résoudre.

### 7.3 Les ondes sphériques

Les ondes planes ont théoriquement une extension infinie. Elles jouent un rôle mathématique essentielle car elles permettent de recomposer mathématiquement n'importe quelle onde, néanmoins, prise séparément, elles diffèrent assez nettement de l'idée intuitive que l'on se fait d'une onde. Dans notre quotidien, nous sommes plus souvent confrontés à des ondes sphériques, c'est à dire des ondes émises par un point source dans toutes les directions de l'espace.

Afin de trouver l'expression mathématique des ondes sphériques, revenons à l'équation d'onde de d'Alembert mais écrite à 3 dimensions :

$$\Delta \xi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \tag{7.15}$$

où  $\Delta$  est l'opérateur laplacien qui s'écrit en coordonnées sphériques :

$$\Delta f(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rf(r))$$

ce qui donne donc

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\xi) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$$

ce qui se réécrit :

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\xi) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (r\xi)}{\partial t^2} = 0 \tag{7.16}$$

qui n'est autre que l'équation d'onde de d'Alembert pour la variable  $r\xi$ . Par conséquent les solutions de l'équation 7.16 sont des ondes planes avec la variable  $r\xi$ . Donc au total :

$$\xi(r, t) = \frac{1}{r} [f(r - ct) + g(r + ct)] = \frac{1}{r} [\psi(t - r/c) + \phi(t + r/c)]$$

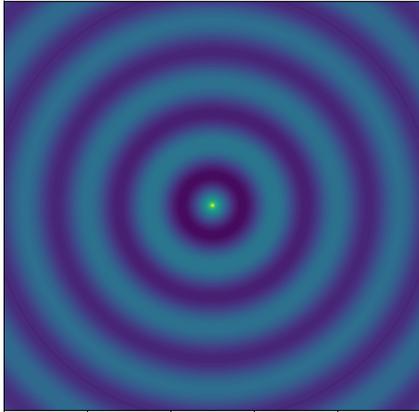


FIGURE 7.5: Schéma d'une onde sphérique 2D

13. Un obstacle peut être défini comme un milieu dont l'impédance propagative (cf infra) et très différente de celle du milieu de propagation

Une onde a pour surfaces d'onde des sphères concentriques. Le centre des sphères est appelé foyer de l'onde sphérique. Le facteur  $1/r$  assure la conservation de l'énergie lors de la propagation de l'onde qui s'étale dans l'espace.

Mathématiquement, il est possible de décomposer une onde plane en une somme d'onde sphérique et, inversement, il est possible de décomposer une onde plane en somme d'onde sphérique (cf annexe ??).

Ce sont les ondes sphériques qui sont utilisés dans le principe de *Huygens-Fresnel*. Ce principe stipule que lorsque qu'une onde rencontre un obstacle<sup>13</sup> dont les dimensions sont comparable à la longueur d'onde de l'onde alors tout se passe comme si les points non obstrués de l'obstacle émettaient des ondes sphériques dont l'amplitude (complexe) est proportionnelle à l'amplitude de l'onde initiale en ce point. Ces sources fictives sont cohérentes et de leur interférence naît une figure de diffraction.

Dans la suite de ce cours nous utiliserons très majoritairement que les ondes planes. En effet, compte-tenu de la linéarité de l'équation d'onde de d'Alembert, les seules ondes planes suffisent à décrire une onde quelconque.

## 7.4 L'impédance propagative

### 7.4.1 Tentative de définition

Le mot "impédance" est un de ces termes "passe-partout" souvent utilisés en physique dont le sens est finalement assez flou.

Vous l'avez sûrement déjà utilisée en électronique où l'impédance est le lien entre la tension  $U$  aux bornes d'un composant et le courant  $I$  circulant dans le composant. On a alors  $U = ZI$  avec  $Z$  l'impédance, un nombre a priori complexe, dont le module est mesurée ici en Ohm. La norme de l'impédance traduit une modification de l'amplitude entre la tension et le courant, alors que la phase de l'impédance traduit un déphasage.

Nous l'avons aussi introduite dans le cas d'un oscillateur mécanique à la section 2.3.5. Nous l'avons définie comme le rapport de la force extérieure  $F$  essayant d'imposer une pulsation  $\omega$  sur la vitesse  $v$  que l'on obtient sur l'oscillateur, avec donc  $F = ZV$ . A la résonance, l'impédance est minimale, c'est à dire que pour une force  $F$  fixée, c'est à la résonance que la vitesse de l'oscillateur est la plus grande. Le transfert d'énergie (i.e. la puissance) est alors maximum.

Dans ces deux exemples, on pourrait définir<sup>14</sup> l'impédance comme le rapport d'une grandeur caractérisant une excitation (la tension  $U$  ou la force  $F$ ) à laquelle il est soumis à celui d'une grandeur caractérisant sa réponse (l'intensité  $I$  ou la vitesse  $v$ ).

Nous allons voir que dans le cas des ondes l'impédance prend, en

14. Richard Taillet, Loïc Villain et Pascal Febvre, Dictionnaire de physique, De Boeck, 2013

quelque sorte, deux nouvelles significations.

- L'impédance traduit le couplage entre les deux grandeurs qui se propagent dans l'onde. Nous allons appeler *relation de structure* l'équation (non différentielle) qui relie les grandeurs couplées l'une à l'autre.
- L'impédance mesure la puissance nécessaire à produire une onde.

#### 7.4.2 Relation de structure et impédance propagative

Comme nous l'avons vus plusieurs fois dans le chapitre 5. Dans tout phénomène ondulatoire, il y a toujours deux grandeurs couplées  $A$  et  $B$  qui se propagent. L'apparition de  $A$  influe sur  $B$  et inversement.

Mathématiquement, il existe deux équations différentielles qui couplent les variations spatiales et temporelles de  $A$  et  $B$ . Reprenons par exemple le cas des ondes transversales sur une corde inextensible. Nous savons que la force transversale  $T_y$  et la vitesse transversale sont les solutions d'une équation d'onde de d'Alembert. Nous savons donc maintenant grâce à ce qui a été vu dans ce chapitre que l'on peut mettre la force transversale  $F_y$  et la vitesse transversale sous la forme  $v_y$  :

$$v_y(x, t) = f(x - ct)$$

Considérons des ondes planes progressives et injectons leur forme mathématiques dans la première équation de couplage (cf eq.5.6). Nous allons obtenir une nouvelle relation, dite relation de structure, entre la force verticale et la vitesse verticale :

$$\frac{\partial T_y(x, t)}{\partial x} = \mu \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = \mu \frac{\partial f(x - ct)}{\partial t} \quad (7.17)$$

Nous pouvons alors appliquer les relations portant sur les ondes planes lorsque l'on évalue leur dérivées partielles, ce qui donne ici pour le membre de droite de l'équation 7.17 :  $\partial_t f(x - ct) = -c \partial_x f(x - ct)$ . Nous obtenons alors :

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial T_y(x, t)}{\partial x} = -c \frac{\partial f(x - ct)}{\partial x} \quad (7.18)$$

L'intégration par rapport à l'espace donne <sup>15</sup> :

$$\frac{1}{\mu} T_y(x, t) = -cf(x - ct) = -cv_y(x, t) \quad (7.19)$$

soit :

$$T_y(x, t) = -\mu cv_y(x, t) = -\sqrt{T\mu} v_y(x, t) \quad (7.20)$$

Ce que l'on réécrit finalement :

Relation de structure - onde plane sur une corde

$$T_y(x, t) = \pm Z v_y(x, t) \quad \text{avec} \quad Z = -\sqrt{T\mu} \quad (7.21)$$

où nous avons noté  $Z$  l'impédance <sup>16</sup> propagative du milieu.

15. Constante d'intégration

16. Dans un milieu dispersif (cf chapitre 10), l'impédance propagative  $Z$  dépend la pulsation  $\omega$  de l'onde plane monochromatique considérée, on la note alors  $Z(\omega)$ .

Pour une onde se déplaçant vers les  $x$  décroissants, on aurait écrit  $v_y = g(x + ct)$  et le même calcul aurait abouti à un changement de signe, d'où le  $\pm$  dans l'équation 7.21.

Ce résultat est bien plus simple à démontrer avec des ondes planes monochromatiques en écriture complexe et la démonstration fait l'objet de l'exercice A.

L'impédance propagative ne dépend que des caractéristiques de la corde et non de l'onde qui se propage. Ce constat se généralise :

#### Impédance propagative

L'impédance dépend uniquement du milieu de propagation et non de l'onde qui se propage.

### 7.4.3 Puissance nécessaire à produire une onde

L'équation 7.21 peut aussi s'écrire  $F_y = -Zv_y$ .

Considérons alors une corde dont on essaye de mettre une extrémité en  $x = 0$  en mouvement. Tout se passe comme si le point d'attache en  $x = 0$  de la corde se comportait comme un piston qui créerait une force de frottement fluide (de type  $-\alpha v$ ) où l'importance du frottement est donnée par l'impédance.

Tout comme une résistance indique quelle chute de tension  $U$  (i.e. combien d'énergie perdent les électrons) il faut avoir pour faire circuler un courant  $I$ , l'impédance d'une corde pour une onde mécanique indique quelle force il faut appliquer, par exemple au début de la corde, pour créer une onde où la vitesse du déplacement vertical vaut  $v_y$ .

Plus précisément, la puissance nécessaire pour créer une onde sinusoïdale en  $x = 0$  début de la corde, vaut :

$$P = Fv = Zv^2 = Z \left( \frac{\partial y(0, t)}{\partial t} \right)^2 = ZA^2 \omega^2 \sin^2 \omega t$$

ce qui donne une puissance moyenne de :

$$\langle P \rangle = Z\omega^2 \frac{A^2}{2}$$

L'impédance indique donc à quel point il est difficile de mettre une corde en oscillation. Attention, il s'agit bien de mettre en oscillation et non en mouvement. Ce qui s'oppose au mouvement, c'est la masse  $\mu L$  de la corde, ce qui s'oppose à la création d'une onde, c'est l'impédance  $Z = \sqrt{\mu T_0}$ .

## 7.5 Aspect énergétique

### 7.5.1 L'énergie

Une onde transporte-t-elle de l'énergie? Intuitivement, nous répondons oui et nous allons montrer que cela est le cas pour une onde progressive (ou régressive). Nous verrons néanmoins que les ondes stationnaires étudiées au prochain chapitre ne transportent pas d'énergie.

L'énergie contenue dans un bout de corde de taille  $dx$  est à la fois sous forme cinétique et potentielle.

L'énergie cinétique vaut :

$$E_c = \frac{1}{2} m v_y^2 = \frac{1}{2} m \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \quad (7.22)$$

L'énergie potentielle dépend de l'étirement  $dl$  de la corde. L'étirement est dû aux forces de tension aux deux extrémités du bout de corde. La norme de cette force est constante et vaut  $T_0$ . Son travail  $\delta W$  vaut donc  $\delta W = T_0 dl$  et il est égal à l'énergie potentielle stockée sous forme élastique par le bout de corde. Reste donc maintenant à estimer  $dl$ . Le bout de corde est schématisé sur la figure 7.6. Comme nous supposons que le déplacement vertical est extrêmement faible, nous pouvons effectuer un développement limité :

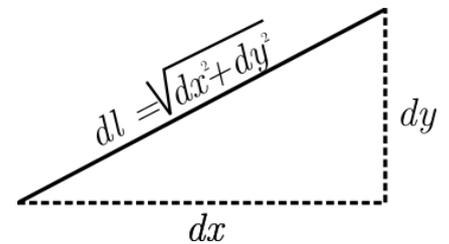


FIGURE 7.6: Étirement d'un élément de corde de longueur  $dl$

$$dl = dx \sqrt{1 + \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2} \approx dx + \frac{1}{2} dx \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$$

et nous avons donc au total pour l'énergie potentielle :

$$E_p = \frac{1}{2} T_0 dx \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \quad (7.23)$$

Au final, l'énergie par unité de longueur contenue dans le bout de corde  $dx$ , vaut :

$$E = \frac{E_c + E_p}{dx} = \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \frac{T_0}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \quad (7.24)$$

Nous pouvons réécrire l'équation 7.24 en prenant en compte l'expression de la vitesse de l'onde  $c = \sqrt{T_0/\mu}$  :

$$E = \frac{\mu}{2} \left[ \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + c^2 \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (7.25)$$

On peut maintenant s'intéresser au cas d'une onde plane  $a(x, t) = f(x \pm ct)$ , brique de base de toute onde. Nous pouvons alors utiliser le fait que  $\partial a / \partial t = \pm c \partial a / \partial x$ . Alors les deux termes, énergie cinétique et énergie potentielle sont égaux et nous pouvons écrire :

$$E = \mu \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \quad \text{ou} \quad E = T_0 \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \quad (7.26)$$

L'énergie passe successivement de la forme cinétique à la forme potentielle. Nous retrouvons ce que nous avons vu lors de l'étude d'oscillateurs couplés (cf schéma 3.4 p53). Cette fois, le nombre d'oscillateur étant infini, l'onde continue de se propager tout en cyclant entre forme cinétique et forme potentielle.

## 7.6 TD7

### Questions de cours

1. Utiliser l'écriture mathématique d'une onde plane pour montrer que cela correspond à l'écriture d'une onde qui se propage dans l'espace au cours du temps.
2. Vérifier qu'une onde plane progressive est bien solution de l'équation de d'Alembert.
3. Retrouver la forme que doit avoir une onde plane monochromatique en injectant une onde plane dont la dépendance temporelle est harmonique dans l'équation de d'Alembert.
4. Retrouver la relation de dispersion associée à l'équation d'onde de d'Alembert.
5. Quelle est l'écriture mathématique d'une onde sphérique ?
6. Donner la relation de structure pour une onde plane se propageant le long d'une corde.
7. Qu'est-ce que l'impédance propagative ?

### "Dessine moi une onde plane"

Dessiner (ou plutôt schématiser) :

1. Une onde monochromatique mais non plane.
2. Une onde plane mais non monochromatique.
3. une onde plane monochromatique.
4. une onde non plane et non monochromatique.

### Propagation d'une onde sur une corde

Une corde, sans raideur, de masse linéique  $\mu$ , de longueur  $L$ , est fixée en  $x = L$  avec une tension  $T_0$  à un mur. On pose  $c = \sqrt{T_0/\mu}$ . On néglige le poids de la corde. Le déplacement transversal d'un point  $M$  d'abscisse  $x$  sur la corde est décrit par la fonction  $y(x, t)$ .

La corde étant initialement immobile, le mouvement suivant est imposé à la corde à partir de l'instant  $t = 0$  à l'extrémité  $x = 0$  :

- pour  $t \in [0; \tau]$   $y(0, t) = a \frac{t}{\tau}$
- pour  $t \in [\tau; 3\tau]$   $y(0, t) = a$
- pour  $t \in [3\tau; 5\tau]$   $y(0, t) = \frac{a}{2\tau}(5\tau - t)$

- pour  $t > 5\tau$   $y(0, t) = 0$

avec  $\tau = 0.1 \frac{L}{c}$ ,  $L = 10$  cm et  $a = 2$  mm

1. Représenter la corde à l'instant  $t = 6\tau = 0.6 \frac{L}{c}$
2. Quelle est, à cet instant, la vitesse de la corde aux points d'abscisses  $0.2L$ ,  $0.4L$  et  $0.55L$ ?

### Relation de dispersion à partir d'une équation de Klein Gordon

L'équation d'onde de Klein-Gordon a été établie à l'exercice 4.3 p.75 :

$$\frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + \Omega_0^2 \psi(x, t) = 0$$

1. Donner la relation de dispersion sous la forme  $k(\omega)$  d'une onde plane monochromatique qui se propage en obéissant à l'équation d'onde de Klein Gordon.
2. Que se passe-t-il pour une onde plane monochromatique dont la pulsation  $\omega$  est inférieure à  $\Omega_0$ ?

### Relation de structure des ondes sonores et des ondes dans un câble coaxiale

1. A partir des deux équations couplant le champ de surpression et le champ des vitesses (cf eq 5.13 et 5.17 p.82) :

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{et} \quad \chi_S \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Trouver la relation de structure et l'impédance propagative d'un milieu pour la propagation d'une onde sonore.

Pour ce faire, on utilisera une onde plane monochromatique en écriture complexe à la fois pour la vitesse et la surpression que l'on injectera dans les relations de couplage.

On traitera d'abord le cas de l'onde progressive, puis de l'onde régressive.

2. Faire de même pour les ondes électromagnétiques le long d'un câble coaxiale. On redonne les deux équations de couplage (cf eq5.20 et 5.21 p.85) :

$$\Gamma \frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\partial I}{\partial x} \quad \text{et} \quad -\frac{\partial V}{\partial x} = \Lambda \frac{\partial I}{\partial t}$$

## 7.7 CQFR

### *Connaissances*

1. Savoir que les solutions de l'équation de d'Alembert sont des combinaisons d'ondes planes.
2. Connaître et comprendre l'écriture d'une onde plane harmonique.
3. Savoir reconnaître la périodicité spatiale et la périodicité temporelle d'une onde plane et monochromatique.
4. Savoir que la relation de dispersion relie la périodicité spatiale et la périodicité temporelle d'une onde plane et monochromatique dans un milieu de propagation donné.
5. Connaître la forme mathématique d'une onde sphérique.
6. Savoir l'impédance propagative relie les deux grandeurs qui se propagent via la relation de structure.
7. Savoir que l'impédance propagative indique la puissance nécessaire pour faire apparaître une onde dans le milieu considéré.

### *Savoir faire*

1. Savoir écrire et manipuler mathématiquement les ondes planes :
  - Connaître les deux formes  $f(x - ct)$  et  $f(t - x/c)$ .
  - Dérivation spatiale
  - Dérivation temporelle
  - Mettre en évidence la propagation de l'onde plane.
2. Savoir retrouver la relation de dispersion à partir de l'équation d'onde.
3. Savoir retrouver la relation de structure en utilisant des ondes planes monochromatiques en écriture complexe (cf exercice A)



## 8 Réflexion et transmission

L'ÉQUATION D'ONDE DE D'ALEMBERT a été obtenue en considérant le couplage de  $N$  oscillateurs identiques, autrement dit dans un milieu continu. Nous allons donc voir comment se comportent les ondes lors d'un changement de milieu de propagation (comme par exemple l'arrivée d'une onde sonore sur un mur d'une pièce). Après avoir constaté l'apparition d'une onde réfléchie et d'une onde transmise, nous calculerons les coefficients de réflexion et de transmission.

Nous exprimerons ensuite ces coefficients en terme d'impédance propagative. Comme dans le chapitre précédent nous illustrerons les phénomènes de réflexion et transmission pour les ondes mécaniques le long d'une corde, les ondes acoustiques et les ondes électromagnétiques le long d'un câble coaxial.

### 8.1 Réflexion et transmission à une discontinuité

L'équation d'onde de d'Alembert a été obtenue pour le cas d'un système totalement symétrique, ou autrement dit dans un milieu uniforme comme par exemple une onde sonore se propageant dans l'air dans une pièce à la vitesse  $c_{\text{air}}$ . Mais que devient l'équation lorsque le milieu devient *discontinu* lorsque par exemple l'onde sonore atteint le mur au bout de la pièce? L'idée est alors d'écrire l'équation pour l'onde se propageant dans le mur (on trouve alors une vitesse  $c_{\text{mur}}$ ) et de regarder en détails les conditions aux limites entre les deux milieux, air et mur.

Nous allons tout d'abord étudier ces phénomènes en les illustrant par les ondes transverses le long d'une corde fixée à l'une de ses extrémités à un mur. Lorsque une onde progressive arrive au niveau du mur, elle ne disparaît pas purement et simplement. Nous observons au contraire une onde réfléchie. D'une part, l'onde devient une onde régressive et d'autre part, l'onde est maintenant inversée. Comment expliquer ces observations?

### Sommaire

8.1 Réflexion et transmission à une discontinuité . . . . .	125
8.2 Réflexion et transmission en terme d'impédance. . . . .	128
8.3 Adaptation d'impédance . . .	134
8.4 TD8 . . . . .	135
8.5 CQFR . . . . .	139

### 8.1.1 Conditions aux limites

Revenons donc sur le cas d'une onde transversale se propageant sur une corde car cet exemple est particulièrement visuel. Mais, au lieu de prendre un milieu de propagation totalement continu, considérons une corde infinie avec une densité  $\mu_1$  pour  $-\infty < x < 0$  et  $\mu_2$  pour  $0 < x < \infty$ . La tension  $T_0$  est la même de part et d'autre de la corde, si bien que la vitesse de l'onde (cf eq.5.18 p.84) vaut  $c_1 = \sqrt{T_0/\mu_1}$  pour les  $x$  négatifs et  $c_2 = \sqrt{T_0/\mu_2}$  pour les  $x$  positifs.

Intéressons nous à une onde propagative de la forme  $f_i(x - c_1 t)$  ("i" pour incidente) arrivant à l'endroit du changement brusque de densité en  $x = 0$ . En fait, l'écriture équivalente (cf eq 7.3) :

$$a_i(x, t) = f_i\left(t - \frac{x}{c_1}\right)$$

va s'avérer être plus pratique par la suite.

De façon la plus générale possible, deux phénomènes peuvent apparaître à la transition en  $x = 0$  :

*Une onde réfléchie*

$$a_r(x, t) = f_r\left(t + \frac{x}{c_1}\right)$$

dont le signe + indique la propagation vers les  $x$  négatifs et dont la vitesse est la même que l'onde incidente.

*Une onde transmise*

$$a_t(x, t) = f_t\left(t - \frac{x}{c_2}\right)$$

qui se propage dans la direction des  $x$  positifs et à la vitesse  $c_2$  dans le milieu 2.

Nous pouvons alors définir une onde avant la discontinuité que nous appellerons onde à gauche :

$$a_G(x, t) = a_i(x, t) + a_r(x, t) = f_i\left(t - \frac{x}{c_1}\right) + f_r\left(t + \frac{x}{c_1}\right)$$

et l'onde après la discontinuité que nous appellerons onde à droite :

$$a_D(x, t) = a_t(x, t) = f_t\left(t - \frac{x}{c_2}\right)$$

Nous allons alors utiliser deux conditions aux limites au point  $x = 0$  portant sur  $a_G(0, t)$  et  $a_D(0, t)$ .

- La courbe décrivant les ondulations de la corde est continue. Nous avons à tout temps  $t$  :

$$a_G(0, t) = a_D(0, t) \Rightarrow f_i(t) + f_r(t) = f_t(t) \quad (8.1)$$

- La *pente* de la corde en  $x = 0$  est *continue*. Autrement dit, la pente doit être la même à gauche et à droite. Si cela n'était pas le cas, le point  $x = 0$ , correspondant à un élément de corde ayant une masse infiniment faible, subirait une force transversale non nulle (voir

schéma 8.1). Comme la masse de ce point est extrêmement faible, l'accélération créée par la discontinuité serait colossale conduisant à la rupture de la corde. Nous avons donc (cf encart p.112) :

$$\frac{\partial a_G(x,t)}{\partial x}(x=0,t) = \frac{\partial a_D(x,t)}{\partial x}(x=0,t) \quad (8.2)$$

et donc :

$$-\frac{1}{c_1}f'_i(t) + \frac{1}{c_1}f'_r(t) = -\frac{1}{c_2}f'_t(t)$$

Ce qui s'intègre<sup>1</sup> en :

$$c_2f_i(t) - c_2f_r(t) = c_1f_t(t) \quad (8.3)$$

En utilisant les deux équations de continuité 8.1 et 8.3 et en isolant successivement  $f_r(t)$  et  $f_t(t)$  on aboutit à :

$$f_r(t) = \frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1}f_i(t) \quad \text{et} \quad f_t(t) = \frac{2c_2}{c_2 + c_1}f_i(t) \quad (8.4)$$

### 8.1.2 L'onde réfléchie

On s'intéresse tout d'abord à l'onde réfléchie et nous ignorons donc pour l'instant la présence d'une onde transmise.

Les équations 8.4 ont été établies, certes en  $x = 0$  mais pour un temps  $t$  quelconque. Nous pouvons les utiliser même lorsque la vibration n'est pas encore arrivée en  $x = 0$ . Appliquons ces relations au temps  $t_0 = t + x/c_1 (= t - (-x/c_1))$  :

$$f_r\left(t + \frac{x}{c_1}\right) = \frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1}f_i\left(t - \left(-\frac{x}{c_1}\right)\right)$$

Ce qui peut aussi s'écrire en notation à deux variables  $x$  et  $t$  :

amplitude de réflexion

$$a_r(x,t) = \frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1}a_i(-x,t) \quad (8.5)$$

Cette équation nous dit que l'onde réfléchie  $a_r$ , au temps  $t$  et à la position  $x$ , est la même que l'onde incidente  $a_i$  mais avec une amplitude multipliée par  $(c_2 - c_1)/(c_2 + c_1)$  et surtout à la position *négative*  $-x$ . La vitesse de l'onde réfléchie est la même, en norme, que celle de l'onde incidente mais de direction opposée.

Seules les valeurs de  $x$  négatives sont pertinentes en ce qui concerne les ondes incidentes et réfléchies, au delà on est dans le milieu 2 où par définition seule l'onde transmise peut exister. Pourtant, si on se place à  $t = 0$  au moment où l'onde incidente est dans la zone  $x < 0$ , l'équation 8.5 prédit l'existence d'une onde réfléchie dans la zone  $x > 0$ . Cette onde n'a pas de réalité physique, mais, mathématiquement, tout se passe comme si une onde réfléchie pré-existait déjà avant que l'onde incidente n'atteigne le mur. Cette onde "fantôme" ou plutôt fictive va à la rencontre de l'onde incidente à la vitesse  $c_1$

1. On suppose la corde au repos loin de l'excitation, la constante d'intégration est donc prise à zéro

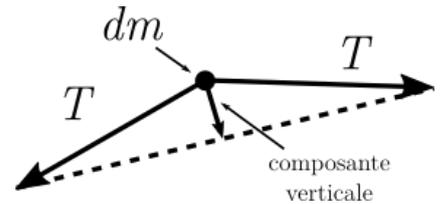


FIGURE 8.1: Schéma des forces de tension qui mettraient en mouvement la corde jusqu'à la rupture s'il n'y avait pas continuité de la pente de la corde en tout point.

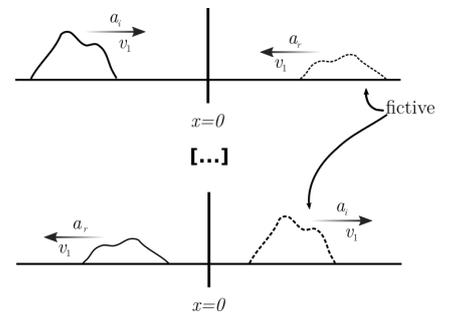


FIGURE 8.2: Schéma pour l'onde réfléchie. Tout se passe comme si l'onde réfléchie était une onde fictive, dans la partie  $x > 0$ , qui va à la rencontre de l'onde incidente. Une fois la réflexion en  $x = 0$  passée (schéma du bas), c'est maintenant l'onde incidente qui, étant dans la partie  $x > 0$ , est fictive.

et les deux se mélangent en  $x = 0$ . De ce mélange subsiste l'onde réfléchiée se déplaçant vers la gauche et qui devient l'onde ayant une réalité physique et l'onde incidente qui continue imperturbable vers la droite à la vitesse  $c_1$  mais qui devient fictive dès qu'elle entre dans la zone  $x > 0$ .

Dans la zone où l'onde incidente et l'onde réfléchiée se rencontrent, le profil de l'onde est égal à la somme de l'onde incidente  $a_i$  et de l'onde réfléchiée  $a_r$  (cf ex 8.4). Prévoir la forme du profil de la corde est tout sauf intuitif et il faut alors se fier aux calculs, guidés par la formule 8.5.

### 8.1.3 L'onde transmise

Effectuons maintenant la même démarche pour l'onde transmise et regardons ce que prédit l'équation de continuité 8.4 pour le temps  $t - x/c_2 = t - c_1/c_1x/c_2$  :

$$f_t \left( t - \frac{x}{c_2} \right) = \frac{2c_2}{c_2 + c_1} f_i \left( t - \frac{c_1}{c_1} \frac{x}{c_2} \right)$$

Ce qui peut aussi s'écrire en notation à deux variables  $x$  et  $t$  :

Amplitude transmise

$$a_t(x, t) = \frac{2c_2}{c_2 + c_1} a_i((c_1/c_2)x, t) \tag{8.6}$$

Comme pour l'onde réfléchiée, l'équation 8.6 prédit l'existence d'une onde transmise fictive dans la région  $x < 0$ . Cette onde transmise à :

- une amplitude multipliée par  $2c_2/(c_2 + c_1)$
- une vitesse multipliée par  $c_2/c_1$
- une largeur (i.e. durée temporelle) multipliée par  $(c_2/c_1)$  par rapport à l'onde incidente<sup>2</sup>.

A aucun moment l'onde incidente et l'onde transmise fictive n'ont en même temps une signification physique. De ce fait, elle ne se mélange pas en  $x = 0$  comme cela était le cas pour l'onde réfléchiée.

## 8.2 Réflexion et transmission en terme d'impédance

Nous venons de voir comment obtenir la forme de l'onde réfléchiée et transmise en fonction de l'onde incidente. Nous allons maintenant nous intéresser plus particulièrement à l'amplitude des ondes réfléchiées et transmises. Nous allons voir à travers les ondes mécaniques le long d'une corde, les ondes acoustiques puis les ondes électrocinétiques le long d'un câble coaxial que ces amplitudes, dans les cas les plus simples ne font intervenir que les *impédances propagatives* des deux milieux constituant la discontinuité.

2. Ce qui se voit peut-être mieux sur l'écriture équivalente de 8.6 :

$$a_t((c_2/c_1)x, t) = \frac{2c_2}{c_2 + c_1} a_i(x, t)$$

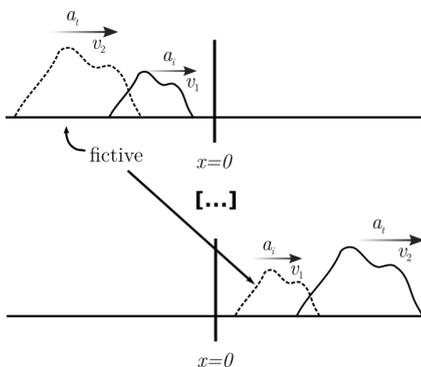


FIGURE 8.3: Schéma pour l'onde transmise. Tout se passe comme si l'onde transmise était une onde fictive, dans la partie  $x < 0$ , qui se propage à une vitesse  $c_2$  différente de l'onde incidente ( $c_1$ ). Une fois la transmission en  $x = 0$  passée (schéma du bas), c'est maintenant l'onde incidente qui, étant dans la partie  $x > 0$ , est fictive.

### 8.2.1 Cas des ondes mécaniques

Nous savons grâce au chapitre 7 que les quantités qui se propagent le long d'une corde sont la vitesse verticale  $v_y(x, t)$  et la tension verticale  $T_y(x, t)$  et que ces deux grandeurs, lorsqu'elles sont écrites sous forme d'onde plane, sont reliées par la relation de structure  $T_y(x, t) = \pm Z v_y(x, t)$  avec un signe + lorsque l'onde est progressive et un signe - lorsque l'onde est régressive avec  $Z = \mu c$ .

Considérons la propagation d'onde plane harmonique, il co-existe trois types d'ondes :

- L'onde incidente :

$$v_{y\text{inc}}(x, t) = v_0 e^{i(\omega t - k_1 x)} \quad \text{et} \quad T_{y\text{inc}}(x, t) = Z v_0 e^{i(\omega t - k_1 x)}$$

- L'onde réfléchie<sup>3</sup> :

$$v_{y\text{refl}}(x, t) = \underline{r} v_0 e^{i(\omega t + k_1 x)} \quad \text{et} \quad T_{y\text{refl}}(x, t) = -Z_1 \underline{r} v_0 e^{i(\omega t + k_1 x)}$$

où  $\underline{r}$  est le coefficient de réflexion pour la vitesse transverse que l'on cherche à déterminer. Ce coefficient est défini par  $\underline{r} = \underline{V}_r / \underline{V}_i$  où  $\underline{V}_i$  et  $\underline{V}_r$  sont les amplitudes complexes (prenant donc en compte un éventuel déphasage) du champ de vitesse incident et réfléchi respectivement.

- L'onde transmise<sup>4</sup> :

$$v_{y\text{trans}}(x, t) = \underline{t} v_0 e^{i(\omega t - k_2 x)} \quad \text{et} \quad T_{y\text{trans}}(x, t) = -Z_2 \underline{t} v_0 e^{i(\omega t - k_2 x)}$$

où  $\underline{t}$  est le coefficient de réflexion pour la vitesse transverse que l'on cherche aussi à déterminer. Ce coefficient est défini par  $\underline{t} = \underline{V}_t / \underline{V}_i$  où  $\underline{V}_t$  est l'amplitude complexe du champ de vitesse transmis.

La continuité de la vitesse et la tension verticale en  $x = 0$ , abscisse où le changement de milieu se produit, conduit à deux équations :

- La continuité des vitesses :

$$v_1(x = 0^-, t) = v_2(x = 0^+, t)$$

soit :

$$v_{y\text{inc}}(0^-, t) + v_{y\text{refl}}(x = 0^-, t) = v_{y\text{trans}}(x = 0^+, t)$$

ce qui se traduit par :

$$(1 + \underline{r}) v_0 e^{i\omega t} = \underline{t} v_0 e^{i\omega t}$$

soit :

$$1 + \underline{r} = \underline{t} \tag{8.7}$$

- La continuité de la tension verticale :

$$T_1(x = 0^-, t) = T_2(x = 0^+, t)$$

3. Noter le signe plus devant le terme en  $k_1 x$  et le signe moins dans la relation de structure car l'onde réfléchie est régressive.

4. Noter la présence du vecteur d'onde  $k_2$  car nous sommes dans le milieu 2.

soit :

$$T_{yinc}(0^-, t) + T_{yrefl}(x = 0^-, t) = T_{ytrans}(x = 0^+, t)$$

ce qui se traduit par :

$$Z_1(1 - \underline{r})v_0e^{i\omega t} = Z_2\underline{t}v_0e^{i\omega t}$$

soit<sup>5</sup> :

$$1 - \underline{r} = \frac{Z_2}{Z_1}\underline{t} \tag{8.8}$$

5. Noter la présence de  $Z_1$  pour le milieu 1 et  $Z_2$  pour le milieu 2 ainsi que le signe - devant  $\underline{r}$  car l'onde réfléchie est régressive et la relation de structure devient alors  $T_{yrefl}(x, t) = -v_{yrefl}(x, t)$ .

En combinant les équations 8.7 et 8.8, nous obtenons, pour la *vitesse transverse* :

$$\underline{r} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad \text{et} \quad \underline{t} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \tag{8.9}$$

Définissons maintenant le coefficient de réflexion  $\underline{r}' = \underline{T}_r/\underline{T}_i$  et de transmission  $\underline{t}' = \underline{T}_t/\underline{T}_i$  pour la tension transverse  $T_y$ .

La continuité des vitesses transversales en  $x = 0$  conduit à :

$$\frac{1}{Z_1}(1 - \underline{r}') = \frac{1}{Z_2}\underline{t}'$$

et la continuité de la tension verticale en  $x = 0$  à :

$$1 + \underline{r}' = \underline{t}'$$

Ces deux équations nous permettent d'écrire :

$$\underline{r}' = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} \quad \text{et} \quad \underline{t}' = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} \tag{8.10}$$

Nous voyons à travers les équations 8.9 et 8.10 que les coefficients de réflexion et de transmission ne sont *pas les mêmes* pour les deux quantités qui se propagent c'est à dire ici la vitesse verticale  $v_y(x, t)$  et la tension verticale  $T_y(x, t)$ .

*Coefficients de réflexion et transmission en puissance* Comme nous l'avons vu au chapitre 7 (voir section 7.4.3 p.120), la puissance transmise par l'onde est obtenue en effectuant le produit<sup>6</sup> des deux grandeurs se propageant avec l'onde. La puissance s'écrit donc  $P(x, t) = v_y(x, t)T_y(x, t)$  ce qui dans le cas d'onde plane progressive et en utilisant la relation de structure peut aussi s'écrire  $P_{OP}(x, t) = Zv_y(x, t)^2 = 1/ZT_y(x, t)^2$ .

6. Notons que cela n'a pas de sens de parler de l'énergie portée par l'onde de vitesse transversale  $v_y(x, t)$ . L'onde est de façon indissociable l'association de la vitesse transversale  $v_y(x, t)$  et de la tension transversale  $T_y(x, t)$ .

Nous pouvons alors définir :

— Un coefficient de réflexion en puissance par  $R = P_r/P_i$  où  $P_r$  et  $P_i$  sont les puissances moyennes en  $x = 0$  de l'onde réfléchie et incidente respectivement. Nous avons alors<sup>7</sup> :

$$R = \frac{P_r}{P_i} = \frac{1/Z_1 T_r^2}{1/Z_1 T_i^2} = r'^2 = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}\right)^2 \tag{8.11}$$

7. Nous pouvons aussi écrire que :

$$R = \frac{Z_1 v_r^2}{Z_1 v_i^2} = r^2$$

En effet, en regardant plus attentivement on peut voir que  $r^2 = r'^2$

— le coefficient de transmission en puissance  $T = P_t/P_i$  où  $P_t$  est la puissance moyenne en  $x = 0$  de l'onde transmise. Nous avons alors :

$$T = \frac{P_t}{P_i} = \frac{1/Z_2 T_t^2}{1/Z_1 T_i^2} = \frac{Z_1}{Z_2} \underline{t}'^2 = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} \tag{8.12}$$

La conservation de l'énergie impose que :

$$R + T = 1 \tag{8.13}$$

*Quelques cas de figure* Considérons la réflexion d'une onde transversale sur une corde lors d'une discontinuité. Pour simplifier, on considère que la tension de la corde est la même de part et d'autre de la discontinuité.

- *Mur à droite* : c'est à dire  $\mu_2 = \infty$  et donc  $Z_2 = \infty$ . Pour la vitesse transversale  $v_y(x, t)$  qui est la grandeur liée à la déformation de la corde nous obtenons via les équations 8.9, 8.11 et 8.12,  $r = -1$ ,  $t = 0$ ,  $R = 1$  et  $T = 0$ . Il n'y a donc pas d'onde transmise puisque  $T = 0$ , et l'onde  $v_y(x, t)$  réfléchiée a la même amplitude que l'onde incidente mais elle est inversée. Cela correspond bien à ce que l'on observe expérimentalement<sup>8</sup>. Notons que  $r' = 1$ , c'est à dire que l'onde réfléchiée  $T_{y\text{refl}}(x, t)$  n'est pas inversée.
- *Corde légère à gauche et massive à droite* : c'est à dire  $\mu_1 < \mu_2$  et donc  $Z_1 < Z_2$ . On a alors  $-1 < r < 0$  et  $0 < t < 1$ . Il y a alors pour  $v_y(x, t)$  une réflexion (inversée) partielle et une transmission partielle.
- *Corde uniforme* : c'est à dire  $\mu_1 = \mu_2$  et  $Z_1 = Z_2$ . On a alors  $r = 0$  et  $t = 1$ ,  $R = 0$ , et  $T = 1$ . Il n'y a pas de réflexion et la transmission est totale. Ce qui était attendu lorsqu'il n'y a plus de discontinuité.
- *Corde massive à gauche et légère à droite* : c'est à dire  $\mu_1 > \mu_2$  et  $Z_1 > Z_2$ . On a alors  $0 < R < 1$  et  $0 < T < 1$ . Il y a alors une réflexion (*non inversée*) partielle et une transmission partielle.
- *Corde de masse nulle à droite* : c'est à dire  $\mu_2 = 0$  et  $Z_2 = 0$ . On a alors<sup>9</sup>  $r = 1$ ,  $R = 1$  et  $T = 0$ . L'onde<sup>10</sup> est totalement réfléchiée sans être inversée comme avec un mur. Pour une corde, la réalisation expérimentale la plus proche est de considérer un anneau de masse négligeable accroché au bout de la corde et libre de se déplacer sans frottement le long d'un axe vertical.

8. Mais cela n'est pas pour autant intuitif. Pourquoi, par exemple, l'action du mur ne serait pas d'absorber les vibrations de la corde? A défaut d'avoir une réponse plus claire, on peut déjà voir que cela est interdit par la conservation de l'énergie. En effet, le mur étant infiniment lourd il ne peut pas être mis en mouvement et absorber d'énergie, l'énergie de l'onde incidente ne peut pas disparaître d'où la nécessité d'une onde réfléchiée.

9. Avec  $t = 2Z_1 / (Z_1 + Z_2)$ , on obtient  $t = 2$  ce qui ne pose pas de problème. En effet, le coefficient de transmission  $t$  concerne l'éventuelle amplitude de l'onde transmise, or cette dernière ne transporte pas d'énergie car  $T = 0$

10. A nouveau le résultat est différent pour  $T_y(x, t)$  l'onde en vitesse transversale  $v_y(x, t)$  est totalement réfléchiée mais inversée ( $r' = -1$ )

### 8.2.2 Cas des ondes acoustiques

Les deux quantités qui se propagent sont le champ des vitesses des particules de fluide  $v(x, t)$  et le champ de surpression  $p(x, t)$  reliés par la relation de structure  $p(x, t) = \pm Zv(x, t)$  dans le cas d'onde plane avec  $Z = \rho c$ .

Soit donc une onde plane harmonique incidente ayant pour champ des vitesses :

$$v_{\text{inc}}(x, t) = v_0 e^{i(\omega t - k_1 x)} \quad \text{et} \quad p_{\text{inc}}(x, t) = Z v_0 e^{i(\omega t - k_1 x)}$$

Lors d'un changement brusque de milieu en  $x = 0$  pour une onde acoustique, il y a :

- Continuité de la pression. En effet, l'interface entre les deux milieux étant de masse nulle, la résultante des forces de part et d'autre en  $x = 0^-$  et  $x = 0^+$  doit être nulle sous peine d'obtenir une accélération infinie. La surface au niveau du changement

11. voir l'exercice 8.4 où ce n'est plus le cas.

de milieu étant la même la pression est continue en  $x = 0$ , ce qui s'écrit <sup>11</sup> :

$$p_1(x = 0^-, t) = p_2(x = 0^+, t)$$

- La continuité du champ de vitesse en  $x = 0$ . En effet, l'air étant un fluide incompressible, il y a conservation du débit volumique et  $S_1 v_1(x = 0^-, t) = S_2 v_2(x = 0^+, t)$  où  $S_1$  et  $S_2$  sont les surfaces du milieu 1 et 2 respectivement au niveau de l'interface. Nous supposons ici  $S_1 = S_2$  et nous avons donc :

$$v_1(x = 0^-, t) = v_2(x = 0^+, t)$$

12. Avec la pression jouant un rôle similaire à la tension transverse (i.e. le rôle de la contrainte) et le champ des vitesses jouant un rôle similaire à celui de la vitesse transverse d'un élément de corde (i.e. le rôle de la déformation).

On aboutit alors aux mêmes <sup>12</sup> expressions des coefficients de réflexion et de transmission que les équations 8.9, 8.11 et 8.12.

*Quelques exemples* Calculons les coefficients de réflexion et de transmission en énergie dans deux cas assez courants.

13. En partant de la relation de structure et  $Z = p/v$ , on peut voir que l'on peut exprimer une impédance acoustique en Pascal seconde par mètre

- *Interface eau - air.* La vitesse des ondes sonores dans l'air est de  $c_{\text{air}} = 340 \text{ m s}^{-1}$  et la masse volumique  $\rho_{\text{air}} = 1.225 \text{ kg m}^{-3}$  soit une impédance <sup>13</sup> de  $Z_{\text{air}} = 415 \text{ Pa s m}^{-1}$  et pour l'eau la vitesse du son est de  $c_{\text{eau}} = 1500 \text{ m s}^{-1}$  et la masse volumique  $\rho_{\text{eau}} = 1000 \text{ kg m}^{-3}$  soit une impédance de  $Z_{\text{eau}} = 1.5 \times 10^6 \text{ Pa s m}^{-1}$  Nous obtenons alors <sup>14</sup> :

$$R_{\text{eau}} = 0.999 \quad \text{et} \quad T_{\text{eau}} = 0.001$$

14. Il s'agit ici des coefficients en incidence normale. Tout comme pour des ondes lumineuses, ces coefficients dépendent de l'angle d'incidence.

Nous voyons donc que la quasi-totalité de l'énergie est réfléchi. Par conséquent, il est difficile d'entendre des sons émis à la surface lorsque nous sommes sous l'eau.

- *Interface bois - air.* Nous allons à nouveau trouver des résultats assez proches que ceux avec l'eau car le bois est bien plus massif et bien moins compressible que l'air. Plus exactement, la vitesse typique du son dans le bois est de l'ordre  $c_{\text{bois}} \approx 3300 \text{ m s}^{-1}$  et la masse volumique d'un bois standard est de  $\rho_{\text{bois}} \approx 600 \text{ kg m}^{-3}$  ce qui donne une impédance de  $Z_{\text{bois}} = 2 \times 10^6 \text{ Pa s m}^{-1}$ ; nous sommes à nouveau dans le cas d'une interface vers un milieu d'impédance quasi-infinie. Nous obtenons pour les coefficients :

$$R_{\text{bois}} = 0.999 \quad \text{et} \quad T_{\text{bois}} = 0.001$$

Ainsi, contrairement à une idée reçue, une porte n'absorbe que très très peu les ondes sonores; lorsque l'on ferme un pièce le son n'en sort plus car il est en permanence *réfléchi* par les murs et la porte.

### 8.2.3 Cas des ondes le long d'un câble coaxial

Les deux quantités qui se propagent sont le courant  $I(x, t)$  et la tension  $U(x, t)$  reliés par la relation de structure  $U(x, t) = \pm Z I(x, t)$  dans le cas d'ondes planes avec  $Z = \sqrt{\Lambda/\Gamma}$ . En  $x = 0$ , le milieu

change brusquement et passe du câble coaxial d'impédance  $Z_1$  à un milieu d'impédance  $Z_2$ . Par exemple, si nous court-circuitons la masse et l'âme du câble, l'impédance terminale est nulle  $Z_2 = 0$ . A contrario, si la ligne électrique est ouverte (aucune connexion), l'impédance terminale est infinie  $Z_2 = \infty$ .

La continuité de la tension  $U(0, t)$  en  $x = 0$  est assurée par le condensateur et la continuité du courant  $I(0, t)$  en  $x = 0$  est assurée par la bobine. L'application de ces deux relations de continuité conduit aux mêmes<sup>15</sup> expressions pour les coefficients de réflexion et de transmission que les équations 8.9, 8.11 et 8.12.

NB : Vous allez étudier en TP les réflexions d'une onde électromagnétique en bout d'un câble coaxial de 100m. Contrairement à une corde tendue où on observe habituellement la grandeur associée à la déformation (i.e. la vitesse transversale), on observe ici avec l'oscilloscope la *tension* qui est la grandeur associée à la *contrainte*. Ainsi il faut utiliser le coefficient de réflexion  $r'$  (cf eq.8.10) et, par exemple, la réflexion sur une impédance infinie ne conduit pas à une onde réfléchie inversée ( $r' = -1$ ), mais à une onde non inversée ( $r' = 1$ ).

15. Avec la tension jouant un rôle similaire à la tension transverse/pression (i.e. le rôle de la contrainte) et le courant jouant un rôle similaire à celui de la vitesse transverse d'un élément de corde/vitesse des molécules de fluide (i.e. le rôle de la déformation).

#### 8.2.4 Généralisation

Les coefficients de réflexion et de transmission lors d'un changement brusque, en incidence normale, d'un milieu d'impédance propagative  $Z_1$  à un milieu d'impédance propagative  $Z_2$  ne dépendent que des impédances propagatives des deux milieux. Nous avons :

##### Coefficient de réflexion et de transmission

Pour la déformation (la vitesse transverse, la vitesse des particules fluides, le courant) :

$$r_{\text{Déformation}} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad \text{et} \quad t_{\text{Déformation}} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \quad (8.14)$$

Pour la contrainte (la tension transverse, la surpression, la tension) :

$$r_{\text{Contrainte}} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} \quad \text{et} \quad t_{\text{Contrainte}} = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (8.15)$$

Et pour les coefficients en énergie (avec  $R + T = 1$ ) :

$$R = \left( \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} \right)^2 \quad \text{et} \quad T = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} \quad (8.16)$$

Insistons sur le fait que l'impédance propagative d'un milieu est a priori une grandeur complexe (cf exercice 8.4) et dépend a priori de la pulsation  $\omega$  de l'onde harmonique ainsi que de l'angle d'incidence (i.e du vecteur d'onde  $k$ ) de l'onde plane.

### 8.3 Adaptation d'impédance

Contrairement à ce que l'on pourrait penser, une transmission optimale d'une onde d'un milieu 1 vers un milieu 2 n'est pas obtenue lorsque l'impédance du milieu 2 est la plus petite possible<sup>16</sup>.

L'équation 8.16 montre que pour avoir une transmission de l'onde parfaite entre deux milieux (i.e. pas de réflexion), il faut que l'impédance soit la même de part et d'autre de la discontinuité. On parle alors d'adaptation d'impédance

Il existe principalement deux méthodes pour obtenir une adaptation d'impédance :

1. Faire en sorte que  $Z_1 = Z_2$ , ce qui veut par exemple dire pour l'exemple d'une onde sur la corde de régler la tension  $T_2$  de la corde pour que  $\sqrt{T_2\mu_2} = \sqrt{T_1\mu_1}$ .
2. Faire une transition progressive<sup>17</sup> de l'impédance  $Z_1$  vers l'impédance  $Z_2$ .

Voici quelques exemples d'adaptation d'impédance :

- Dans les circuits électriques la transmission de puissance d'une partie du circuit à l'autre est maximale lorsque leurs impédances respectives sont égales. L'impédance est généralement un nombre complexe<sup>18</sup>, ce qui indique un déphasage entre les deux grandeurs qui se propagent (le courant et la tension en l'occurrence).
- Lors d'une échographie, on insère un gel (typiquement du glycérol) entre la sonde et la peau. L'impédance du gel pour les ondes ultrasonores est comprise entre celle en sortie de sonde et celle de la peau<sup>19</sup>.
- Un diapason dans l'air produit peu de son car les impédances de l'onde acoustique dans le métal et dans l'air sont très différentes. En plaçant le diapason sur une table en bois par exemple, le son produit par le diapason est bien plus fort. En effet, la différence d'impédance entre le bois et le métal du diapason est relativement faible, l'onde est donc transmise vers la table et comme celle-ci a une bien plus grande surface que le diapason l'onde est transmise plus efficacement vers l'air<sup>20</sup> (bien que l'impédance du bois soit très différente de celle de l'air).
- Un mégaphone, ou de façon plus générale tous les pavillons en sortie des instruments à vent, sont des exemples d'adaptation progressive d'impédance. Lorsque nous parlons, une bonne partie des ondes sonores est réfléchi à la sortie de notre bouche. Mettre les mains en porte-voix permet de créer une transition entre la taille de la cavité buccale et l'extérieur d'où une diminution de l'onde réfléchi.

16. En fait, si  $Z_2 \rightarrow 0$ , on a au contraire une onde complètement réfléchi.

17. Cette méthode fait l'objet de l'exercice 8.4

18. L'équivalent mécanique serait la prise en compte de frottement et d'un ressort pour l'anneau ou alors relier l'anneau à la tige avec un ressort (voir exercice 8.4).

19. cf exercice 8.4

20. On peut aussi créer un phénomène de résonance en plaçant le diapason en contact d'une cavité comme celle utilisée en TP (voir chapitre 9).

## 8.4 TD8

## Questions de cours

1. Que vaut le coefficient de réflexion et de transmission lorsque l'onde passe d'un milieu de vitesse de propagation  $v_1$  à un milieu  $v_2 = 3v_1$ ? Faire un dessin montrant l'onde incidente, l'onde réfléchie et l'onde transmise.
2. Une onde se propage sur une corde de masse linéique  $\mu_1$  et de tension  $T_1$ . L'onde arrive à un point de jonction vers une deuxième corde de masse linéique  $\mu_2$ . Quelle doit-être la tension de la deuxième corde pour ne pas avoir de réflexion? Que devient l'onde si le milieu 2 est un mur (impédance infinie)? Si le milieu est un anneau pouvant coulisser sans frottement sur un poteau (impédance nulle)?
3. Qu'est-ce que l'adaptation d'impédance?

## Réflexion d'une onde sur une corde tendue

Une corde, sans raideur, de masse linéique  $\mu$ , de longueur  $L$ , est fixée en  $x = L$  avec une tension  $T_0$  à un mur. On pose  $c = \sqrt{T_0/\mu}$ . On néglige le poids de la corde. Le déplacement transversal d'un point  $M$  d'abscisse  $x$  sur la corde est décrit par la fonction  $y(x, t)$ .

La corde étant initialement immobile, le mouvement suivant est imposé à la corde à partir de l'instant  $t = 0$  à l'extrémité  $x = 0$  :

- pour  $t \in [0; \tau]$   $y(0, t) = a \frac{t}{\tau}$
- pour  $t \in [\tau; 3\tau]$   $y(0, t) = a$
- pour  $t \in [3\tau; 5\tau]$   $y(0, t) = \frac{a}{2\tau}(5\tau - t)$
- pour  $t > 5\tau$   $y(0, t) = 0$

avec  $\tau = 0.1 \frac{L}{c}$ ,  $L = 10$  cm et  $a = 2$  mm

1. Représenter la corde à l'instant  $t = 6\tau = 0.6 \frac{L}{c}$   
Quelle est, à cet instant, la vitesse de la corde aux points d'abscisses  $0.2L$ ,  $0.4L$  et  $0.55L$ ?
2. Dessiner de même la corde à l'instant  $t = 13\tau$
3. Même question pour  $t = 18\tau$ .

## Réflexion partielle d'une onde sonore plane sur une section de tuyau

Au voisinage de  $x = 0$ , se produit un brusque changement de la section d'un tuyau sonore (voir fig.8.4) :

- Pour  $x < 0$ , la partie (1), la section est  $S_1$
- Pour  $x > 0$ , la partie (2), la section est  $S_2$

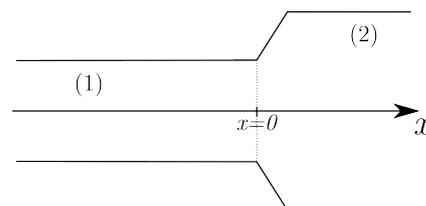


FIGURE 8.4: Changement de section d'un tuyau sonore

Par ailleurs (1) et (2) renferment le même fluide, de caractéristique  $\rho_0$  et  $\chi_0$  et de pression de repos  $P_0$ .

De  $x = -\infty$  arrive dans le milieu (1) une onde plane progressive et monochromatique  $\underline{v}_i(x, t) = v_0 e^{i(\omega t - kx)}$

On constate qu'il y a réflexion et transmission partielles : il apparait :

- Une onde plane régressive réfléchie dans (1) :  $\underline{v}_r(x, t) = r e^{i(\omega t + kx)}$  avec  $r$  le facteur de réflexion
- Une onde plane progressive transmise dans (1) :  $\underline{v}_t(x, t) = t e^{i(\omega t - kx)}$  avec  $t$  le facteur de transmission

Une étude expérimentale prouve qu'il y a, naturellement, continuité des pressions de part et d'autre de  $x = 0$ , mais qu'il n'y a pas continuité des vitesses.

21. Le débit massique  $D$  est défini par  $D = vS$ , dans le cas de l'écoulement d'un fluide incompressible, il se conserve.

1. On suppose, en revanche, qu'il y a continuité des débits massiques<sup>21</sup>. Déterminer ainsi  $r$  et  $t$ .
2. En déduire les facteurs énergétiques de réflexion  $R$  et  $T$ . Vérifier la conservation de l'énergie.
3. Soit  $x = S_2/S_1$ . Que deviennent  $r, t, R$  et  $T$  quand  $x \rightarrow \infty$  (passage du tuyau vers un milieu libre)? Que signifient les résultats concernant  $t$  et  $T$ ?
4. En déduire que dans un tuyau de longueur  $L$ , ouvert au deux bouts, peuvent exister des ondes stationnaires.
5. Pourquoi une trompette se termine-t-elle par un pavillon? Pourquoi fait-elle plus de bruit qu'un pipeau? Dans le même ordre d'idée, pourquoi notre voix est-elle plus forte lorsque l'on utilise nos mains comme porte-voix?

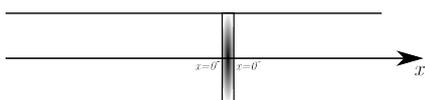


FIGURE 8.5: Réflexion et transmission sur un obstacle mobile

*Réflexion et transmission sur un obstacle mobile*

Une onde plane progressive et harmonique sonore, de pulsation  $\omega$ , émise par une source du côté des  $x < 0$  se propage dans un tuyau d'axe  $Ox$  et de section uniforme  $S$  horizontale. Ce tuyau est fermé au voisinage de  $x = 0$  par un piston de masse  $m$  pouvant coulisser sans frottement (voir fig.8.5).

Le fluide est le même à droite et à gauche du piston, caractérisé par  $\rho_0$  et  $\chi_{0S}$ .

Hypothèses :

1. Le piston est suffisamment mince pour que l'on puisse confondre les abscisses de ses deux faces.
2. L'amplitude de son mouvement est suffisamment faible (approximation acoustique) pour qu'on le suppose toujours en  $x = 0$  ( $x = 0^-$  sur la face gauche,  $x = 0^+$  sur la face droite)

On note  $\underline{r}$  et  $\underline{t}$  les coefficients de réflexion et de transmission (a priori complexes) de l'onde au niveau du piston.

1. En utilisant les conditions aux limites, relier la vitesse du piston à l'amplitude de la vitesse de l'onde  $V_0$  et aux coefficients  $\underline{r}$  et  $\underline{t}$ .
2. Que vaut l'accélération du piston ?
3. Écrire le PFD appliqué au piston. En déduire  $\underline{r}(i\omega)$  et  $\underline{t}(i\omega)$ . Étudier le cas particulier où  $m \rightarrow \infty$
4. En déduire les facteurs de transmission  $T$  et de réflexion  $R$  pour l'intensité sonore. Donner les diagrammes de Bode en dB.
5. Si le piston représente une cloison, que peut-on déduire de ce qui précède sur la transmission du son par une cloison ?

*Adaptation d'impédance pour couche anti-reflet acoustique*

Le facteur de réflexion d'une onde sonore entre l'air et un liquide est voisin de 1 et par conséquent le facteur de transmission est quasi nul. Cela pose un problème dans de nombreuses applications allant des sonars des sous-marins à l'utilisation de sondes échographiques pour étudier l'intérieur du corps humain.

Pour diminuer la réflexion entre le milieu (1) ( $\rho_1, \chi_1, c_1, Z_1$ ) et le milieu (2) ( $\rho_2, \chi_2, c_2, Z_2 \neq Z_1$ ), on intercale un milieu (i) ( $\rho_i, \chi_i, c_i, Z_i$ ) entre les abscisses  $x = 0$  et  $x = L$  (voir fig.8.6).

Une onde plane progressive harmonique de pulsation  $\omega$  arrive sous incidence normale depuis le milieu (1) sur l'interface (1)/(i) :  $\underline{v}_1(x, t) = V_0 e^{i(\omega t - k_1 x)}$

Par hypothèse la couche (i) est bien conçue<sup>22</sup>, il n'y a pas d'onde réfléchi dans le milieu (1).

L'onde dans le milieu (2) est alors :

$$\underline{v}_2(x, t) = \underline{t} V_0 e^{i(\omega t - k_2 x)}$$

et dans (i) :

$$\underline{v}_i(x, t) = \underline{A} e^{i(\omega t - k_i x)} + \underline{B} e^{i(\omega t + k_i x)}$$

- 1.(a) L'impédance d'une onde acoustique dans l'air est de  $440 \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-1}$ , alors que celle du sang est de  $1.66 \times 10^5 \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-1}$ . Pourquoi, faut-il absolument éviter la présence d'une couche d'air entre l'émetteur d'ultrason et la peau lors de l'échographie ?
- (b) En pratique, un gel est utilisé comme contact entre l'appareil et la peau. Donner une estimation de son impédance acoustique. Nous allons par la suite calculer sa valeur optimale.
- (c) Est-il possible de réaliser une échographie d'un poumon ?
2. Expliquer l'origine des signes + et - dans l'expression des ondes planes du champ de vitesse  $\underline{v}_i(x, t)$  dans le milieu (i).
3. En utilisant la relation de structure, donner les champs de pressions  $\underline{p}_1(x, t)$ ,  $\underline{p}_i(x, t)$ ,  $\underline{p}_2(x, t)$  dans le milieu (1) (i) et (2) respectivement.
4. Quelles sont les conditions aux limites en terme de vitesse et de pression ?

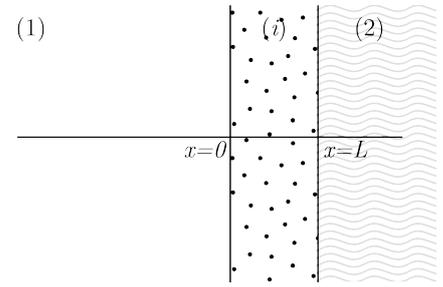


FIGURE 8.6: Adaptation d'impédance pour couche anti-reflet acoustique

22. Plus exactement son épaisseur est calculée pour que les ondes réfléchies à l'interface (1)/(i) soit détruites par interférences avec les ondes réfléchies par l'interface (i)/(2). Les interférences sortant du cadre de ce cours, nous ne regarderons pas plus en détails cet aspect.

5. Exprimer mathématiquement ces conditions aux limites en  $x = 0$  (1)/(i) et  $x = L$  (i)/(2) afin d'aboutir à 4 équations.
6. Montrer alors que :

$$A = \frac{V_0}{2} \left( 1 + \frac{Z_1}{Z_i} \right)$$

et

$$B = \frac{V_0}{2} \left( 1 - \frac{Z_1}{Z_i} \right)$$

7. En utilisant les deux autres équations montrer que :

$$Z_i \cos(k_i L) - i Z_1 \sin(k_i L) = t Z_i e^{-ik_2 L}$$

et

$$Z_1 \cos(k_i L) - i Z_i \sin(k_i L) = t Z_2 e^{-ik_2 L}$$

puis en utilisant les deux équations précédentes :

$$Z_2 Z_i \cos(k_i L) - i Z_2 Z_i \sin(k_i L) = Z_1 Z_i \cos(k_i L) - i Z_i^2 \sin(k_i L) \tag{8.17}$$

8. En utilisant l'égalité des parties réelles puis l'égalité des parties imaginaires dans l'équation 8.17, trouver une condition sur :
  - L'épaisseur  $L$  de la couche anti-reflet. L'écrire en fonction de la longueur d'onde  $\lambda$  de l'onde acoustique.
  - Une condition sur l'impédance du milieu intermédiaire  $Z_i$  en fonction de  $Z_1$  et  $Z_2$ .

### Impédance terminale complexe

Un anneau de masse  $M$  est accroché en  $x = x_0$  au bout d'une corde de masse linéique  $\mu$  tendue avec une tension  $T_0$ .

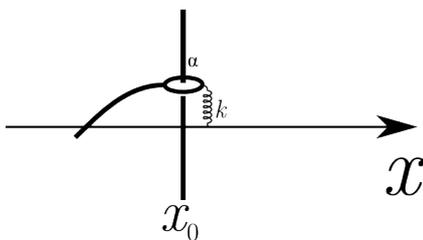


FIGURE 8.7: Impédance terminale complexe

1. Donner la valeur de l'impédance terminale dans le cas où la corde est fixée :
  - (a) à un mur,
  - (b) à un anneau pouvant coulisser sans frottement le long d'une tige,
  - (c) à un anneau de masse  $M$  pouvant coulisser le long d'une tige avec des frottement fluides caractérisés par le coefficient  $\alpha$  tout en étant lié au point  $(x = x_0, y = 0)$  par un ressort de raideur  $k$  et de longueur à vide négligeable (voir fig. 8.7).
2. Donner les situations équivalentes au trois cas précédemment mentionnés :
  - (a) pour une ligne électrique.
  - (b) pour les ondes acoustiques.

## 8.5 CQFR

### *Connaissances*

1. Un changement de milieu de propagation conduit à l'apparition d'une onde réfléchie et d'une onde transmise. L'importance de ces deux ondes dépend des vitesses de propagation respectives des ondes.
2. Les coefficients de réflexion et de transmission s'écrivent aussi en terme d'impédance.
3. On peut diminuer voir annuler les réflexions d'une onde à une interface par adaptation d'impédance.

### *Savoir faire*

1. Savoir exploiter les conditions aux limites pour exprimer les coefficients de réflexion et de transmission à une interface.





## 9 Ondes stationnaires

LES INTERFÉRENCES, c'est à dire la somme d'une onde propagative et d'une onde régressive conduisent à une onde dont les dépendances spatiales et temporelles sont découplées. De telles ondes sont appelées *ondes stationnaires* et jouent un rôle très important en physique<sup>1</sup>. Elles interviennent dès qu'une onde est *confinée* en une zone de l'espace.

Nous commencerons par montrer l'apparition d'ondes stationnaires en étudiant les interférences entre une onde progressive incidente se propageant sur une corde et l'onde régressive issue de la réflexion de la première onde sur une fixation. Nous étudierons le cas d'une extrémité fixe (impédance infinie) et d'une extrémité libre (impédance nulle).

Nous appliquerons ensuite ces résultats au cas d'une corde fixée à ses deux extrémités, qui peut aussi être vue comme une cavité, et qui possède de très nombreuses applications, notamment en musique. Nous verrons que les deux conditions aux limites imposent, d'une part la formation d'ondes stationnaires et d'autre part la quantification des vecteurs d'onde et des pulsations de ces ondes planes. Nous verrons aussi à nouveau qu'un mouvement quelconque de la corde peut être décomposé comme la combinaison linéaire de modes, en l'occurrence des ondes stationnaires.

Nous finirons par quelques considérations énergétiques en montrant qu'une onde stationnaire ne propage pas d'énergie.

### 9.1 Corde semi infinie : mise en évidence des ondes stationnaires

#### 9.1.1 Extrémité fixe

Considérons une l'onde associé à la vitesse verticale sous forme sinusoidale se déplaçant le long d'une corde dans la direction des  $x$  négatifs et qui se réfléchit en  $x = 0$  sur un mur (i.e. impédance infi-

### Sommaire

9.1	Mise en évidence . . . . .	141
9.2	Corde fixée . . . . .	144
9.3	Corde de Melde. . . . .	150
9.4	Aspects énergétiques . . . . .	151
9.5	TD 9 . . . . .	153
9.6	CQFR . . . . .	161

1. Elle peuvent décrire, entre autres, une onde sur une corde, les figures de Chaldni sur une plaque, la fonction d'onde d'une particule enfermée dans une boîte ou encore le comportement d'une cavité optique.

nie). Cette onde s'écrit :

$$v_{yi}(x, t) = V \cos(\omega t + kx + \Phi)$$

L'onde réfléchie au niveau du mur en  $x = 0$  s'écrit (cf eq 8.9) :

$$v_{yr}(x, t) = r v_{yi}(-x, t) = -V \cos(\omega t - kx + \Phi)$$

avec  $r = -1$  pour une impédance infinie.

L'onde totale s'écrit alors :

$$v_y(x, t) = v_{yi}(x, t) + v_{yr}(x, t) = V \cos(\omega t + kx + \Phi) - V \cos(\omega t - kx + \Phi)$$

ce qui peut s'écrire en utilisant la formule trigonométrique  $\cos(a + b) - \cos(a - b) = -2 \sin a \sin b$

$$v_y(x, t) = -2V \sin(\omega t + \Phi) \sin kx \tag{9.1}$$

Nous pouvons tout d'abord voir que la vitesse transversale répond bien à la condition aux limites d'un mur :  $v_y(x = 0, t) = 0$ .

L'équation 9.1 décrit une onde dont les dépendances spatiales et temporelles sont *découplées*.

Si on fige le temps, le profil de l'onde est sinusoïdal avec une période spatiale  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ .

Si on fige l'espace, un point d'abscisse  $x$  oscille sinusoïdalement avec une période temporelle de  $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Nous remarquons aussi la présence de deux types de points particuliers (voir figure 9.1) le long du profil de la corde :

- Tous les points pour lesquels  $kx = n\pi$  ont une amplitude en permanence nulle ; ils sont appelés *noeuds* de vibration.
- A contrario, les points pour lesquels  $kx = n\pi/2$  ont une amplitude de vibration maximale (pour les temps où  $\sin(\omega t + \Phi) = \pm 1$ ) ; ils sont appelés *ventres* de vibration.

Enfin, tous les points de la corde vibrent en phase. Ils passent tous par zéro au même moment.

Une telle onde est appelée *onde stationnaire* car tout se passe comme si l'onde oscillait sinusoïdalement "sur place". Il ne faut pas oublier pour autant que, intrinsèquement, une onde stationnaire est simplement la somme d'une onde plane régressive et d'une onde plane progressive (voir fig 9.2).

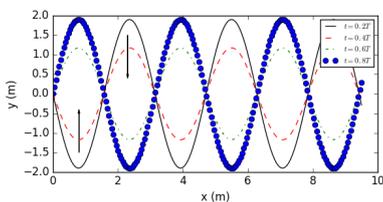


FIGURE 9.1: Onde stationnaire avec une extrémité fixée

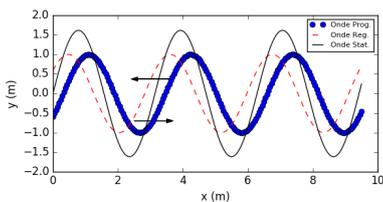


FIGURE 9.2: Une onde stationnaire (en trait plein noir) est intrinsèquement la somme d'une onde progressive (en point bleu) et d'une onde régressive (en pointillé rouge) de même pulsation.

#### Onde stationnaire - définition

Une onde stationnaire est une onde dont les dépendances spatiales et temporelles sont découplées. Mathématiquement le champ d'une onde plane stationnaire s'écrit :

$$a(x, t) = f(x)g(t)$$

Qu'en est-t-il dans les mêmes conditions de la grandeur associée à la contrainte en l'occurrence la tension verticale  $T_y(x, t)$  ? Le coefficient de réflexion est alors  $r' = +1$  (cf équation 8.10). La somme de l'onde incidente et réfléchi s'écrit :

$$\begin{aligned} T_y(x, t) &= T_{yi}(x, t) + T_{yr}(x, t) \\ &= T \cos(\omega t + kx + \phi) + T \cos(\omega t - kx + \phi) \quad (9.2) \\ &= 2T \cos(\omega t + \phi) \cos(kx) \end{aligned}$$

A nouveau<sup>2</sup>, nous voyons que la somme de l'onde incidente et de l'onde réfléchi donne par interférence naissance à une onde stationnaire. Par contre, la position des noeuds de la grandeur associée à la contrainte  $T_y(x, t)$  est différentes de la position de la grandeur associée à la déformation  $v_y(x, t)$ . Là où les noeuds en vitesses ont lieu aux positions  $x_v$  telles que  $\sin kx_v = 0$ , les noeuds de tension ont lieu aux position  $x_T$  telles que  $\cos kx_T = 0$ .

### 9.1.2 Extrémité libre

L'extrémité n'est plus un mur, mais un anneau capable de se déplacer verticalement sans frottement, c'est à dire d'impédance nulle. Le coefficient de réflexion pour la vitesse verticale vaut dans ce cas  $r = 1$ .

L'onde totale s'écrit alors :

$$v_y(x, t) = v_{yi}(x, t) + a_{yr}(x, t) = V \cos(\omega t + kx + \Phi) + V \cos(\omega t - kx + \Phi)$$

ce qui s'écrit, avec la formule trigonométrique  $\cos(a + b) + \cos(a - b) = 2 \cos a \cos b$  :

$$v_y(x, t) = 2V \cos(\omega t + \Phi) \cos kx \quad (9.3)$$

On retrouve à nouveau une onde stationnaire. Il y a cependant un décalage spatial<sup>3</sup>, le sinus est devenu un cosinus. L'évolution du profil de la corde est tracée sur la figure 9.3. Nous voyons en particulier que l'extrémité de la corde est maintenant un ventre de vibration.

Pour la grandeur de contrainte  $T_y(x, t)$ , on obtient :

$$T_y(x, t) = 2T \cos(\omega t + \Phi) \sin kx \quad (9.4)$$

A nouveau, on voit que la position des noeuds et des ventres n'est pas la même pour la grandeur de déformation et celle de contrainte. On peut aussi vérifier la condition aux limites  $T_y(x = 0, t) = 0$ , en effet, il ne peut pas y avoir de force verticale sur l'anneau qui est supposé sans masse.

2. On peut retrouver le même résultat en utilisant les relations de structures. Au deux ondes planes qui constitue le champ de vitesse verticale :

$$\begin{aligned} v_y(x, t) &= v_{yi}(x, t) + v_{yr}(x, t) \\ &= V \cos(\omega t + kx + \Phi) - V \cos(\omega t - kx + \Phi) \end{aligned}$$

nous pouvons obtenir grâce à la relation de structure  $T_y(x, t) = \pm Z v_y(x, t)$  le champ de tension verticale :

$$\begin{aligned} T_y(x, t) &= T_{yi}(x, t) + T_{yr}(x, t) \\ &= ZV \cos(\omega t + kx + \Phi) + ZV \cos(\omega t - kx + \Phi) \end{aligned}$$

et nous retrouvons bien la même expression.

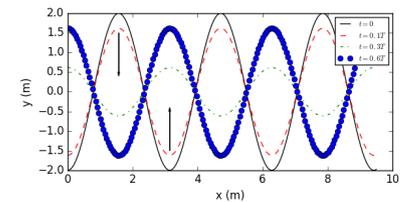


FIGURE 9.3: Onde stationnaire avec une extrémité libre

3. Le décalage temporel, lui, n'a pas d'importance car il correspond juste à un changement du temps de début de l'expérience.

## 9.2 Vibration libre d'une corde fixée à ses extrémités

### 9.2.1 Utilisation des conditions aux limites

Considérons une corde de longueur  $L$  fixée à ses deux extrémités  $x = 0$  et  $x = L$  à des milieux d'impédance infinie.

Concentrons nous sur la vitesse verticale. Nous avons alors maintenant deux conditions aux limites :

$$\forall t \quad v_y(0, t) = 0 \quad \text{et} \quad v_y(L, t) = 0$$

La condition  $v_y(0, t) = 0$  conduit à une onde stationnaire de la forme décrite par l'équation 9.1 :  $v_y(x, t) = -2V \sin(\omega t + \Phi) \sin kx$ . La condition  $v_y(L, t) = 0$ , quelque soit  $t$ , conduit à l'équation :

$$\sin kL = 0$$

Par conséquent, le nombre d'onde<sup>4</sup>  $k$  ne peut prendre que des valeurs multiples de  $n\pi$  où  $n$  est un entier positif :

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \quad (9.5)$$

Plus précisément,  $n$  correspond au numéro d'un des modes de la corde et  $\sin k_n x$  correspond à la forme du mode  $n$ . Nous pouvons aussi exprimer cette relation en terme de longueur d'onde  $\lambda_n = 2\pi/k_n = 2L/n$ . La longueur d'onde de chaque mode est égale à une fraction de  $2L$ . Les premiers modes de la corde sont représentés sur la figure 9.4.

La corde peut être aussi vue comme un résonateur où seules certaines fréquences peuvent exister. Plus précisément, le déphasage  $\Delta\varphi$  d'une onde de longueur d'onde  $\lambda$  qui parcourt la distance  $2L$  (un aller-retour) est de  $\Delta\varphi = 2\pi 2L/\lambda$ . Pour que cette onde revienne en phase,  $\Delta\varphi$  doit être un multiple de  $2\pi$ , ce qui s'écrit  $\Delta\varphi = 2\pi 2L/\lambda = n2\pi$ , et nous retrouvons bien pour la longueur d'onde  $\lambda_n = 2L/n$ .

Trouvons maintenant la pulsation  $\omega_n$  associée au mode  $n$ . Pour cela utilisons la relation de dispersion<sup>5</sup> qui relie la périodicité spatiale à la périodicité temporelle, elle est ici très simple<sup>6</sup> :  $\omega/k = \sqrt{T_0/\mu}$ . Par conséquent, pour le mode  $n$ , nous avons<sup>7</sup> :

$$\omega_n = ck_n = n \frac{c\pi}{L}$$

et donc pour la fréquence du mode  $n$  :

$$v_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{ck_n}{2\pi} = \frac{c(n\pi/L)}{2\pi} = n \frac{c}{2L}$$

Les fréquences possibles sont donc quantifiées<sup>8</sup> et valent des multiples de la fréquence fondamentale  $v_1 = c/2L$ .

Comme l'équation de d'Alembert est linéaire, l'écriture la plus générale pour le profil de l'onde sur la corde est une combinaison linéaire des solutions de la forme donnée dans l'équation 9.5 compte tenu de

4. On parle ici de nombre d'onde et pas de vecteur d'onde car une onde stationnaire ne se propage pas et il n'y a pas à proprement parlé de direction de propagation indiqué par un vecteur d'onde  $k$ . Le nombre d'onde est donc ici la norme d'un vecteur d'onde.

5. La relation de dispersion qui a été établie avec des ondes planes restent vrai avec une onde stationnaire car une onde stationnaire est la somme de deux ondes planes

6. La vitesse ici ne dépend pas du numéro du mode  $n$ , elle est constamment égale à  $c = \sqrt{T_0/\mu}$ , ce n'est plus le cas lorsque le système est dispersif (cf chapitre 10)

7. La relation de dispersion est différente de celle obtenue pour la chaîne de  $N$  oscillateurs (cf eq 4.4 p. 69), pourtant les deux systèmes sont a priori les mêmes. La différence tient dans l'approximation des petits angles faite pour obtenir l'équation de d'Alembert (non dispersive) pour la corde. Au fur et à mesure que le numéro  $n$  du mode augmente le profil de la corde devient de plus en plus anguleux et l'approximation des petits angles, ainsi que celle d'une corde sans raideur, deviennent de moins en moins vrais. Il faudrait alors apporter des corrections à la modélisation de la corde, notamment la prise en compte de variation de la tension de la corde dans la direction longitudinale.

8. Il y a de grandes similitudes avec le cas d'une particule quantique enfermée dans une boîte. Cela est due au fait que la probabilité de présence de la particule est une onde.

la quantification des valeurs du nombre d'onde  $k_n$  et de la pulsation des modes  $\omega_n$ . Nous obtenons alors :

Forme générale d'une onde dans une cavité 1D - extrémité fixes - grandeur de déformation

$$v_y(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(\omega_n t + \Phi_n) \sin k_n x \quad \text{avec} \quad k_n = \frac{n\pi}{L}$$

$$\text{et} \quad \omega_n = ck_n$$

(9.6)

On reconnaît la description des vibrations du système comme la somme des modes qui :

- oscillent sinusoidalement à la pulsation  $\omega_n$
- ont la forme  $\sin k_n x$

Le premier mode ( $n = 1$ ) est appelé le mode fondamental, les modes suivants "l'harmonique  $n$ ".

Les coefficients  $a_n$  et les phases  $\Phi_n$  des harmoniques sont donnés par les conditions initiales. Nous allons voir comment les calculer dans la section suivante.

Nous voyons que n'importe quelle onde se propageant sur la corde (on peut par exemple penser à une corde de guitare), peut se décomposer en une somme de vibrations élémentaires, les modes, et que ces modes sont ici des ondes stationnaires (cf fig 9.4).

Les cas d'une corde fixée à une extrémité et libre à l'autre et d'une corde libre à ses deux extrémités sont traités dans l'exercice 9.5.1.

*Cas de l'onde de contrainte* Établissons maintenant des résultats similaires pour la grandeur associée à la contrainte, en l'occurrence la tension verticale  $T_y(x, t)$ . Pour changer, utilisons des ondes planes monochromatiques en écriture complexe. La tension verticale  $\underline{T}_y(x, t)$  est la somme de deux ondes planes l'une progressive, l'autre régressive, de manière la plus générale possible nous pouvons écrire cela :

$$\underline{T}_y(x, t) = [A_1 e^{ikx} + A_2 e^{-ikx}] e^{i\omega t}$$

et via la relation de structure  $\underline{T}_y(x, t) = \pm \underline{v}_y(x, t)$ , nous obtenons le champ de vitesse verticale  $\underline{v}_y(x, t)$  :

$$\underline{v}_y(x, t) = \frac{1}{Z} [-A_1 e^{ikx} + A_2 e^{-ikx}] e^{i\omega t}$$

La corde étant fixe en  $x = 0$  la vitesse  $y$  est nulle  $\underline{v}_y(x = 0, t) = 0$ , ce qui donne :

$$\underline{v}_y(x = 0, t) = \frac{1}{Z} [-A_1 + A_2] e^{i\omega t} \Leftrightarrow A_1 = A_2 = A$$

En utilisant les relations d'Euler<sup>9</sup>, nous pouvons alors réécrire  $\underline{v}_y(x, t)$  :

9.  $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$   
 et  $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

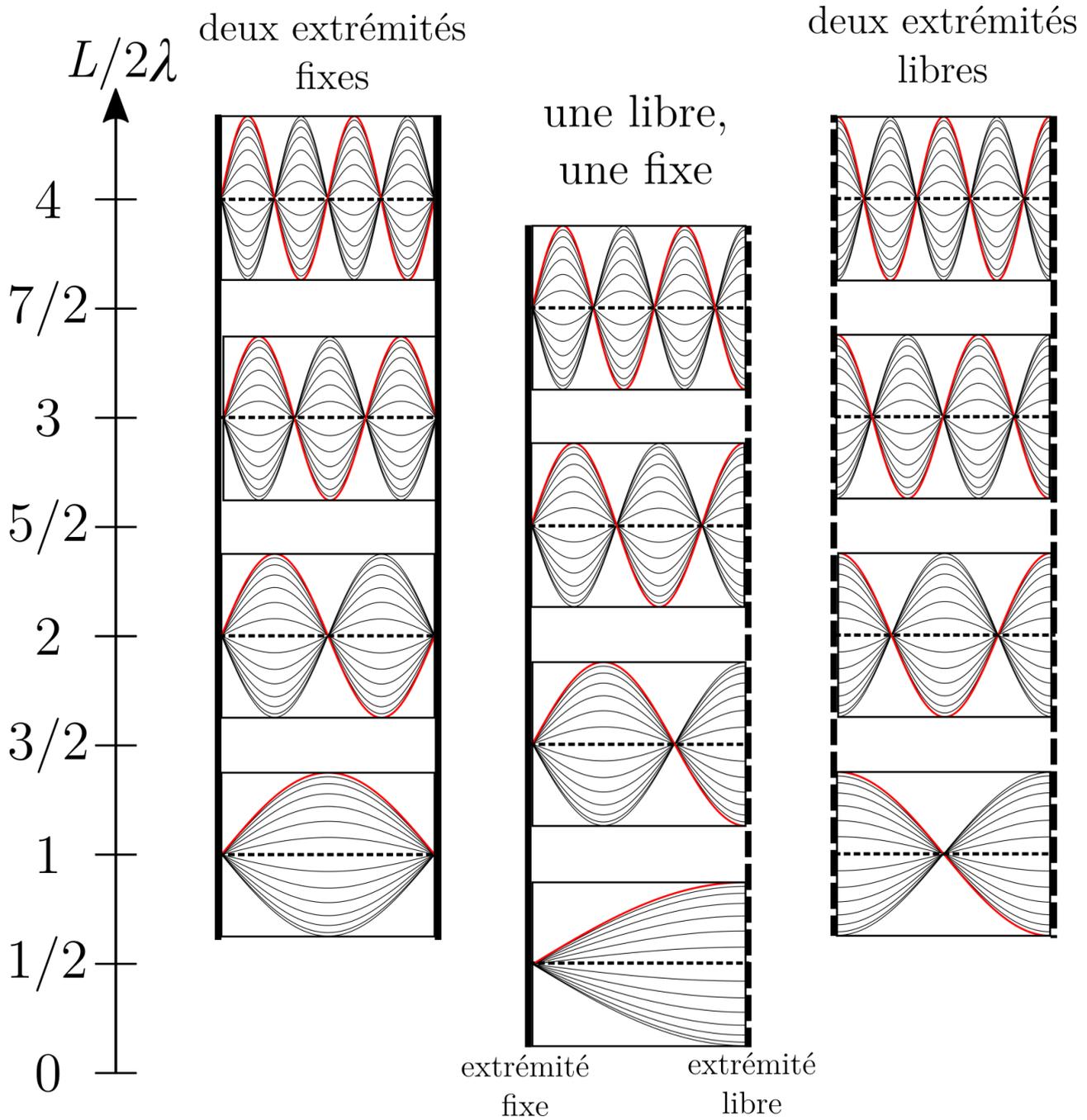


FIGURE 9.4: Mode de vibration du champ lié à la déformation pour différentes configurations de fixation

$$v_y(x, t) = -i \frac{2A}{Z} \sin kx e^{i\omega t}$$

La deuxième conditions aux limites est que la corde est aussi fixe en  $x = L$  soit  $v_y(x = L, t) = 0$ , soit  $\sin kL = 0$ . Nous retrouvons les résultats de la section précédente à savoir que le nombre d'onde  $k$  ne peut prendre que des valeurs quantifiées  $k_n = n\pi/L$ . Regardons donc le champ lié à la contrainte, en l'occurrence la tension verticale :

$$\begin{aligned} T_y(x, t) &= A \left[ e^{ik_n x} + e^{-ik_n x} \right] e^{i\omega t} \\ &= 2A \cos k_n x e^{i\omega t} \end{aligned}$$

ce qui donne en écriture réelle :

Forme générale d'une onde dans une cavité 1D - extrémité fixes - grandeur de contrainte

$$T_y(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t + \Phi_n) \cos k_n x \quad \text{avec} \quad k_n = \frac{n\pi}{L}$$

et  $\omega_n = ck_n$

(9.7)

En comparant les équations 9.6 et 9.7 nous voyons que la dépendance spatiale est en sinus pour le champ lié à la déformation et en cosinus pour le champ lié à la contrainte. Par conséquent, la position des nœuds et des ventres sont décalés entre le champ lié à la déformation et le champ lié à la contrainte. Lorsqu'il y a un nœud de vibration pour le champ lié à la déformation, il y a un ventre pour le champ de contrainte et inversement.

Ces résultats sont généralisables à d'autres ondes que celles se propageant le long d'une corde. La figure 9.5 illustre par exemple les ondes stationnaires à l'extrémité d'un tuyau sonore fixe pour le champ de déformation (la vitesse des particules fluides) et le champ de contrainte (le champ de surpression).

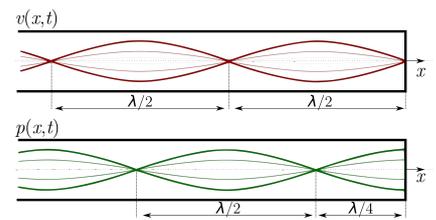


FIGURE 9.5: Onde stationnaire dans un tuyau sonore avec comme condition aux limites une impédance infinie. L'onde stationnaire n'est pas la même pour le champ lié à la déformation (ici la vitesse des particules de fluides  $v(x, t)$ ) et le champ lié à la contrainte (ici la surpression  $p(x, t)$ ). Plus précisément, les deux ondes stationnaires sont décalées d'un quart de longueur d'onde ( $\lambda/4$ ).

### 9.2.2 Analyse harmonique

Reprenons le système à la section précédente. Nous allons obtenir le même résultat qu'auparavant, c'est à dire qu'un mouvement quelconque d'une onde dans une cavité s'écrit comme la combinaison linéaire de ces modes propres qui sont les ondes stationnaires, mais par une autre approche. Soit donc une onde  $v_y(x, t)$  se propage sur une corde fixée à ses deux extrémités. L'onde  $v_y(x, t)$  étant solution de l'équation de d'Alembert, son écriture mathématique la plus générale est :

$$v_y(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

La corde étant maintenue à ses deux extrémités, cela se traduit mathématiquement par deux conditions aux limites :

$$v_y(0, t) = 0 \quad \text{soit} \quad f(t) + g(t) = 0$$

et

$$v_y(L, t) = 0 \quad \text{soit} \quad f\left(t - \frac{L}{c}\right) + g\left(t + \frac{L}{c}\right) = 0$$

d'où :

$$f\left(t - \frac{L}{c}\right) = -g\left(t + \frac{L}{c}\right)$$

et en utilisant le fait que  $f(t) = -g(t)$ , nous obtenons :

$$f\left(t - \frac{L}{c}\right) = f\left(t + \frac{L}{c}\right)$$

La fonction  $f$  est donc périodique et de période temporelle  $T = 2L/c$ . Elle peut donc être décomposée en série de Fourier :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\omega_0 t) + B_n \sin n(n\omega_0 t)]$$

avec

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad \underbrace{\quad}_{\text{Eq. dispersion}} \quad \frac{\pi c}{L}$$

qui est la fréquence du mode fondamental.

Les valeurs de  $f(t - x/c)$  et  $g(t + x/c) = -f(t + x/c)$  s'en déduisent et nous pouvons donc revenir à la forme générale de l'onde :

$$v_y(x, t) = a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \left[ A_n \cos\left(n\omega_0\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) + B_n \sin n\left(n\omega_0\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) \right] \\ - a_0 - \sum_{n=0}^{\infty} \left[ A_n \cos\left(n\omega_0\left(t + \frac{x}{c}\right)\right) + B_n \sin n\left(n\omega_0\left(t + \frac{x}{c}\right)\right) \right]$$

ce qui donne, via les mêmes formules trigonométriques que dans le cas où il n'y a qu'un seul harmonique (cf eq 9.1 p142) :

$$v_y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(n\omega_0 t) + B_n \sin n(n\omega_0 t)) \sin\left(n\omega_0 \frac{x}{c}\right) \quad (9.8)$$

ce qui peut se réécrire :

$$v_y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t + \Phi_n) \left( \sin\left(n\omega_0 \frac{x}{c}\right) \right)$$

Nous reconnaissons alors l'équation 9.6 qui décrit une onde quelconque sur une corde fixée à ses extrémités. Nous l'avons interprétée comme la somme des modes de la corde.

Nous en avons maintenant une autre interprétation. La fixation aux deux extrémités crée une périodicité, de période spatiale  $2L$ , pour les ondes ce qui permet un développement en série de Fourier. L'interférence entre une onde progressive et une onde régressive, exprimée en développement de Fourier, montre à nouveau que les modes de la corde sont des ondes stationnaires dont les vecteurs d'onde  $k_n$  et les pulsations  $\omega_n$  sont quantifiés.

Cette nouvelle interprétation nous donne une méthode pour calculer les coefficients  $A_n$  et  $B_n$  (ou de façon équivalente  $a_n$  et  $\Phi_n$ ) : nous allons utiliser ce que nous venons de voir sur les séries de Fourier.

Il est ainsi possible de déterminer les coefficients du développement en série de Fourier à partir des conditions initiales.

La méthode consiste :

1. Prolonger fictivement la corde, à l'instant  $t = 0$  sur l'intervalle  $[L, 2L]$  ou de façon équivalente entre  $[-L, 0]$ , en créant une corde symétrique par rapport à  $x = 0$ . Le profil de la corde  $y(x)$  est alors impair et périodique de période  $2L$ . En effet, la périodicité des ondes est sur un intervalle de  $2L$ .

En repartant de l'équation 9.8, nous pouvons écrire<sup>10</sup> l'onde à  $t = 0$  :

$$v_y(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n \times 1 \times \sin \left( n \frac{\pi x}{L} \right) \right] \quad (9.9)$$

Nous pouvons interpréter cette équation en la comparant à la définition d'un développement en série de Fourier (cf eq.6.1 p93). Nous voyons alors que les  $A_n$  sont les coefficients de la décomposition en série de Fourier de la fonction  $v_y(x, 0)$  qui est une fonction périodique impaire (donc sans terme en cosinus) et de période  $2L$ .

Ces coefficients  $A_n$  peuvent alors se calculer via :

$$A_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \sin \left( n \pi \frac{x}{L} \right) v_y(x, 0) dx = \frac{2}{L} \int_0^L \sin \left( n \pi \frac{x}{L} \right) v_y(x, 0) dx \quad (9.10)$$

2. Prolonger fictivement la dérivée de la corde à  $t = 0$  de la même manière que précédemment. Nous avons :

$$\frac{\partial v_y}{\partial t}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (-n\omega_0 A_n \sin(n\omega_0 t) + n\omega_0 B_n \cos(n\omega_0 t)) \sin \left( n\omega_0 \frac{x}{c} \right) \right]$$

d'où :

$$\frac{\partial v_y}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n \frac{\pi c}{L} B_n \times 1 \times \sin \left( n \frac{\pi x}{L} \right) \right] \quad (9.11)$$

et nous reconnaissons à nouveau un développement en série de Fourier mais cette fois-ci de la fonction  $\partial v_y / \partial t(x, 0)$ .

D'où le calcul des coefficients  $B_n$  :

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{1}{n\pi c} \int_{-L}^L \sin \left( n \pi \frac{x}{L} \right) \frac{\partial v_y}{\partial t}(x, 0) dx \\ &= \frac{2}{n\pi c} \int_0^L \sin \left( n \pi \frac{x}{L} \right) \frac{\partial v_y}{\partial t}(x, 0) dx \end{aligned} \quad (9.12)$$

Une fois les coefficients  $A_n$  et  $B_n$  obtenus à  $t = 0$ , la décomposition en modes propres décrite par la formule 9.8, permet de connaître le profil de l'onde à n'importe quel temps  $t$ .

Cette démarche est utilisée dans l'exercice 9.5.1 pour calculer le spectre d'une corde pincée.

10. A  $t = 0$ , seul reste le terme en cosinus et qui vaut 1 dans l'expression :

$$A_n \cos(n\omega_0 t) + B_n \sin(n\omega_0 t)$$

### 9.3 Oscillations forcées : corde de Melde

L'expérience dite de la corde de Melde est schématisée sur la figure 9.6. Une corde fixée à ses deux extrémités est mise en vibration à une pulsation  $\omega$ . Comme le système est linéaire, il finit par vibrer à la pulsation  $\omega$ . Plus exactement, chaque point de la corde finit par vibrer à la pulsation  $\omega$ . De plus, tout comme les systèmes d'oscillateurs couplés étudiés au chapitre 4, lorsque la pulsation  $\omega$  est proche de la fréquence d'un des modes  $\omega_n$  du système, ce dernier rentre en résonance et prend la forme du mode  $n$ .

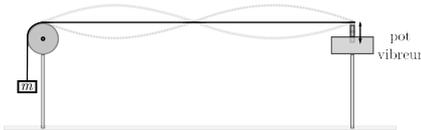


FIGURE 9.6: Schéma de l'expérience de la corde de Melde

L'expérience de la corde de Melde est donc un très bon moyen de visualiser les modes.

Le vibreur crée en  $x = 0$  une onde qui est réfléchiée en  $x = L$  où l'impédance est infinie. L'onde réfléchiée retourne en  $x = 0$ , où elle est absorbée par le vibreur. En effet ce dernier impose en permanence  $x(0, t) = a_v \cos \omega t$ , quelque soit la forme de l'onde réfléchiée qui est absorbée. Comme nous avons une superposition d'une onde progressive et d'une onde régressive, des ondes stationnaires apparaissent sur la corde. Le profil le plus général pour le profil de la corde est :

$$a(x, t) = a_0 \cos(kx + \Phi_F) \cos(\omega t + \Phi_G)$$

De plus le système impose deux conditions aux limites :

$$a(0, t) = a_v \cos \omega t$$

$$a(L, t) = 0$$

La deuxième condition s'écrit :

$$\forall t \quad a(L, t) = a_0 \cos(kL + \Phi_F) \cos(\omega t + \Phi_G) = 0 \Leftrightarrow \cos(kL + \Phi_F) = 0$$

et donc :

$$\Phi_F = \frac{\pi}{2} - kL$$

La deuxième condition s'écrit :

$$a(0, t) = a_0 \cos(\Phi_F) \cos(\omega t + \Phi_G) = a_v \cos \omega t$$

ce qui est possible seulement si :

$$\Phi_G = 0$$

$$a_0 \cos(\Phi_F) = a_v$$

La deuxième équation pouvant se réécrire :

$$a_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} - kL\right) = \sin kL = a_v \Leftrightarrow a_0 = \frac{a_v}{\sin kL}$$

Au total, le déplacement de tout point  $a(x, t)$  sur la corde s'écrit :

Vibration corde de Melde

$$a(x, t) = \frac{a_v}{\sin kL} \sin(k(L - x)) \cos(\omega t) \quad (9.13)$$

Le profil de la corde pour une pulsation  $\omega$  quelconque est donné sur la figure 9.7. Le profil pour une excitation à  $\omega = 3\omega_0$  est donnée sur la figure 9.8

Mathématiquement, nous voyons que pour  $k = k_n = n\pi/L$  (ou, en utilisant la relation de dispersion, aux pulsations  $\omega = \omega_n$ ) la corde rentre en résonance. L’amplitude devient théoriquement infinie. En pratique d’inévitables amortissements, mais aussi la raideur de la corde que nous n’avons pas pris en compte, font que l’amplitude de la corde reste finie.

Une application sur les modes propres de la corde est proposée dans l’exercice 9.5.1.

### 9.4 Aspects énergétiques

Nous avons vu à la section 7.5 p.121 que les ondes prorogatives transportent de l’énergie. Plus exactement, il existe un flux d’énergie qui fait que l’énergie se transmet de proche en proche entre les différentes oscillateurs harmoniques microscopiques qui forment l’onde.

La question est donc de savoir s’il y a un flux d’énergie pour les ondes stationnaires. Il y assurément une *densité* d’énergie non nulle car l’onde (disons une corde pour fixer les idées) se déforme et subit des contraintes, mais cette énergie se propage-t-elle le long de la corde ?

On peut tout d’abord répondre intuitivement que non. En effet, une onde stationnaire est la somme de deux ondes propagatives avec le même flux en énergie mais se propageant dans deux directions opposées. Par conséquent, on s’attend à ce que la somme, en moyenne, de ces deux flux d’énergie opposé s’annule. D’un point de vue encore plus élémentaire, regardons la forme d’une onde propagative et d’une onde stationnaire à deux instants différents. Autant, il est évident de voir dans quel sens se propage l’onde propagative (et donc son énergie) autant il est impossible de dire dans quel sens se serait propagé l’onde stationnaire.

Traduisons donc cette intuition en écriture mathématique. La puissance  $\mathcal{P}(x,t)$  (éventuellement surfacique) d’une onde est le produit des deux grandeurs qui se propagent (le champ lié à la déformation et le champ lié à la contrainte). Pour fixer les idées considérons par exemple le cas des ondes acoustiques et

$$\mathcal{P}(x,t) = p(x,t)v(x,t)$$

où  $p(x,t)$  est le champ de (sur)pression et  $v(x,t)$  le champ de vitesse des particules de fluides. Nous utilisons alors les expressions 9.1 et 9.2 de  $v(x,t)$  et  $p(x,t)$  dans le cas d’onde stationnaire avec comme condition aux limites une impédance infinie<sup>11</sup> :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(x,t) &= p(x,t)v(x,t) = (-2V \sin(\omega t + \phi) \sin kx)(2P \cos(\omega t \phi) \cos kx) \\ &= -4VP(\sin kx \cos kx)(\sin(\omega t + \phi) \cos(\omega t + \phi)) \end{aligned}$$

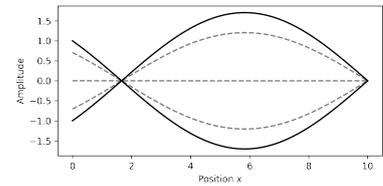


FIGURE 9.7: Amplitude de la corde de Melde pour la pulsation  $\omega = 1.2\omega_0$  qui n’est pas résonante, la corde n’a pas alors le profil d’un mode. Noter l’amplitude des oscillations qui est très faible

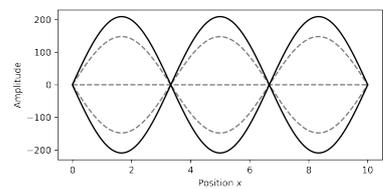


FIGURE 9.8: Amplitude de la corde de Melde pour la pulsation  $\omega = 3\omega_0$ . La corde rentre en résonance et prend la forme du mode correspondant c’est à dire ici l’onde stationnaire du mode 3. Noter l’amplitude des oscillations qui est très importante.

11. Les conclusions sont les mêmes quelques soient les conditions aux limites

Pour un temps et position quelconque la puissance  $\mathcal{P}(x, t)$  n'est pas nulle, par contre sa valeur *moyenne* est nulle car la valeur moyenne (sur une période) de  $\langle \cos(\omega t + \phi) \sin(\omega t + \phi) \rangle = 1/2 \langle \sin 2(\omega t + \phi) \rangle = 0$  est nulle.

En regardant plus en détail, on pourrait voir que l'énergie oscille entre un noeuds et le ventre voisin d'un système d'onde stationnaire mais ne se propage pas au delà. En effet, l'énergie de l'onde est toujours nulle au niveau d'un noeud puisque la déformation est nulle. L'énergie de l'onde est aussi nulle au niveau d'un ventre car c'est alors la contrainte qui est toujours nulle en cet endroit. L'énergie d'une onde stationnaire est donc coincée entre un nœud et le ventre voisin et par conséquent ne peut pas se propager au-delà.

NB : Une onde stationnaire ne permet pas de propager de l'énergie. Par contre, une somme d'onde stationnaire le peut. C'est le cas par exemple d'une onde dans une cavité, comme par exemple une onde sur une corde fixée à ses deux extrémités. Comme nous l'avons vu à la section 9.2.1, une telle onde peut être vue comme la somme d'onde stationnaire et elle transporte bien de l'énergie.

## 9.5 TD 9

*Questions de cours*

1. Quelle est l'onde stationnaire se formant sur une corde semi infinie pour une condition aux limites d'impédance infinie (corde fixe)? Même question pour une impédance nulle?
2. Quelle est la condition de quantification du vecteur d'onde associé à une corde fixée à ses deux extrémités?
3. Quelle est l'expression mathématique décrivant une onde quelconque se propageant sur une corde fixée à ses deux extrémités?
4. Les oscillations harmoniques sont les modes de tout système vibrant. Quelles sont les fonctions qui sont les modes de la vibration d'une corde fixée à ses deux extrémités (i.e une cavité)?
5. Dessiner les 3 premiers modes pour une corde fixée à ses deux extrémités par une impédance infinie.
6. Quel est le profil d'une corde fixée à ses deux extrémités lorsqu'un opérateur la met en oscillation forcée à la pulsation  $\omega_4$  égale à la pulsation du 4ème mode?
7. Pourquoi une onde stationnaire ne transporte pas d'énergie?

## 9.5.1 Vibrations libres d'une corde

En s'inspirant de la partie 9.2 p.145, trouver les pulsations et la forme des modes propres pour la vitesse verticale  $v_y(x, t)$  et la tension verticale  $T_y(x, t)$  pour :

1. Une corde libre <sup>12</sup> en  $x = 0$  et libre en  $x = L$ .
2. Une corde fixée en  $x = 0$  et libre en  $x = L$
12. i.e. fixée à un anneau libre de se déplacer verticalement sur un poteau et sans frottement

Pour ce faire, on utilisera préférentiellement des ondes planes et monochromatiques. Les conditions aux limites sont exprimées avec la grandeur liée à la déformation  $v_y(x, t)$ . La grandeur liée à la contrainte,  $T_y(x, t)$ , est obtenue via la relation de structure.

*Étude des modes propres d'une corde*

On effectue l'expérience de la corde de Melde.

Pour une même corde de longueur  $L = 1.17$  m et une même masse  $M = 25$  g accrochée à celle-ci, on obtient les résultats suivants :

- fréquences de résonance à  $(19 \pm 1)$  Hz avec deux fuseaux
- fréquences de résonance à  $(28 \pm 1)$  Hz avec trois fuseaux

1. Les valeurs expérimentales sont elles compatibles entre elles?
2. Quelle est la fréquence du fondamental? Celles des harmoniques suivantes?
3. Quelle est la vitesse de propagation d'une onde sur la corde?

4. Quelle est la tension de la corde ?
5. En déduire un ordre de grandeur de la masse linéique de la corde.

#### *Caisse de résonance pour diapason*

Un diapason émettant une seule fréquence à 440 Hz est couplé à une cavité parallélépipédique dont la plus grande dimension est  $L_b = 19.5$  cm, l'un des bouts étant fermé, l'autre ouvert.

1. En étudiant la formation d'ondes stationnaires 1D dans la cavité, justifier le choix de 19.5 cm pour  $L_b$ .
2. Dans le même ordre d'idée, pourquoi le timbre d'un piano droit change de façon perceptible lorsque l'on ouvre le capot supérieur du bâtis ?

#### *Mode propre d'une enceinte parallélépipédique*

Une pièce est modélisée par une enceinte parallélépipédique dont les parois sont parfaitement rigides (impédance infinie). Les axes  $Ox$ ,  $Oy$  et  $Oz$  sont choisis selon les côtés de l'enceinte de longueurs  $d_1$ ,  $d_2$  et  $d_3$ . L'origine  $O$  est prise à l'un des sommets du parallélépipède.

Nous cherchons l'évolution du champ de pression  $p(\mathbf{r}, t)$  que nous décomposons en onde harmonique  $p(\mathbf{r}, t) = F(x, y, z)e^{i\omega t}$ .

Le champ des pressions satisfait à l'équation de d'Alembert à 3 dimensions :

$$\Delta p(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0$$

1. Étant donnée la forme de l'enceinte, les conditions aux limites sur les parois sont indépendantes les unes des autres en coordonnées cartésiennes. Nous pouvons alors rechercher pour  $F(x, y, z)$  des solutions à variables séparées :

$$F(x, y, z) = f_1(x)f_2(y)f_3(z)$$

Injecter cette forme spatiale pour le champ des pressions dans l'équation de d'Alembert pour obtenir trois équations différentielles portant sur  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$ . On posera  $k$ , le vecteur d'onde, égal à  $k = \omega/c$ .

2. Résoudre ces équations en tenant compte des conditions aux limites pour la pression sur les parois.
3. En déduire les fréquences des modes propres de l'enceinte.

#### *Quelques notions d'acoustique musicale*

Le principe physique de la plupart des instruments de musique est fondée sur l'apparition d'onde stationnaire.

On considère par exemple une corde de longueur  $L$  fixe à ses deux extrémités (par une impédance finie).

1. Donner les fréquences  $f_n$  des ondes stationnaires, ou dit autrement des modes, qui peuvent s'établir en fonction de :  $n$  le numéro du mode,  $L$  et  $c = \sqrt{T_0/\mu}$  la vitesse de l'onde sur la corde (avec  $T_0$  la tension de la corde et  $\mu$  sa masse linéique).

*Notion de hauteur et de timbre* Nous allons voir pourquoi une note émise par un piano ne sonne pas comme celle émise par une guitare.

Parmi les ondes stationnaires qui permettent de reconstruire n'importe quelle onde se propageant sur une corde tendue entre deux points fixe (cf eq 9.6), l'onde stationnaire de fréquence la plus basse joue un rôle primordiale, elle fixe la hauteur de la note. On l'appelle *fondamentale*.

Les autres ondes stationnaires jouent un rôle plus subtil, elles définissent le *timbre* de l'instrument, c'est à dire la nature du son musical qui permet, par exemple, de faire la différence<sup>13</sup> entre une note jouée avec une guitare ou un piano.

En première approximation<sup>14</sup>, nous allons considérer que la différence entre le son d'une corde de guitare et d'une corde de piano est due à la façon dont la corde est excitée. La corde de guitare est pincée alors que la corde d'un piano est frappée par un marteau.

2. Considérons tout d'abord une corde pincée. Le profil de la corde à  $t = 0$  suit le profil décrit sur la figure 9.9. A nouveau, ce modèle très simpliste est une bonne première approximation pour décrire le timbre d'instruments comme le clavecin ou la guitare<sup>15</sup>.

- (a) Pour simplifier les calculs, on considère que la corde est pincée au milieu de sa longueur. La corde est définie par :

$$a(x,0) = \begin{cases} (2h/L)x, & \text{pour } 0 \leq x \leq L/2 \\ (2h/L)(L-x), & \text{pour } L/2 < x < L \end{cases} \quad (9.14)$$

Elle est lâchée sans vitesse initiale.

Calculer puis tracer l'amplitude des 10 premiers harmoniques de l'onde se déplaçant sur la corde.

3. Considérons ensuite une corde frappée par un marteau. A l'instant  $t = 0$  la corde, de longueur  $L$ , est dans la position d'équilibre :

$$y(x, t = 0) = 0$$

La corde est frappée avec un petit marteau de largeur  $b$  situé entre les abscisses  $x = a$  et  $x = a + b$ . Dans ces conditions la vitesse de chaque point de la corde à l'instant  $t = 0$  peut être définie par la fonction :

$$u(x) = \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0)$$

telle que :

$$u(x) = \begin{cases} u_0 = \text{cste} & \text{si } a \leq x \leq a + b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (9.15)$$

13. D'autres éléments rentrent aussi en compte comme le temps d'attaque du son (le temps nécessaire pour que le son atteigne son niveau maximum) ou encore le temps de relâchement (le temps mis par le son pour s'éteindre une fois que la note n'est plus jouée).
14. Nous négligeons donc l'influence, pourtant extrêmement importante, du résonateur, c'est à dire la caisse de la guitare et la table d'harmonie du piano.
15. Jouée avec un médiator, voir l'exercice 9.5.1 pour une corde jouée avec les doigts.

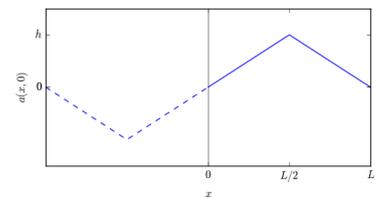


FIGURE 9.9: Schéma du profil d'une corde pincée en son milieu à  $t = 0$

Calculer puis tracer l'amplitude des 10 premiers harmoniques de l'onde se déplaçant sur la corde.

4. Comparer les spectres d'une corde de piano et d'une corde de guitare et apprécier la différence de leur timbre sonore.

*La gamme pythagoricienne* Nous allons maintenant nous intéresser aux fréquences des notes utilisées pour composer de la musique. Nous allons voir pourquoi 12 notes sont utilisées dans la musique occidentale. Nous commençons avec une des premières gammes historiquement mise au point et documentée, la gamme pythagoricienne.

Les grecs anciens avaient à leur disposition des instruments à cordes.

Une de leurs premières constatations expérimentales est qu'une corde de longueur  $L$  et une corde de longueur  $L/2$  (ou  $2L$ ), toute chose égale par ailleurs (tension et masse linéique) ont des sons similaires<sup>16</sup>. Cette observation sert de point de départ à la création de la gamme pythagoricienne, c'est à dire la liste des fréquences utilisés pour créer les notes de musiques. On dit que les notes émises par une corde de longueur  $L$  et celle émise par une corde longueur  $L/2$  sont les mêmes mais séparée d'une *octave*.

La deuxième constatation est que si on on divise maintenant la corde au niveau de  $2/3L$ , on se retrouve avec deux morceaux de corde, le premier de longueur  $L_{1/3} = 1/3L$  et le deuxième de longueur  $L_{2/3} = 2/3L$ . Le son produit simultanément<sup>17</sup> par une corde de longueur  $L$  et une corde de longueur  $L_{2/3} = 2/3L$  est agréable à l'oreille et l'intervalle en fréquence est appelée *quinte*. Le son produit simultanément par une corde de longueur  $L$  et une corde de longueur  $L_{1/3} = 1/3L$  est lui aussi agréable à l'oreille et l'intervalle en fréquence est appelée *quarte*.

5. Quelle est l'intervalle en fréquence entre deux notes séparées par une quinte ?
6. Montrer que la fréquence de la 3ème de l'ondes stationnaires constituant une onde sur la corde (i.e. la 3ème harmonique) est à une quinte + une octave de la fréquence fondamentale. Ainsi la quinte est naturellement présente dans le spectre d'un son périodique.

La gamme pythagoricienne est ensuite construite à partir des quintes. A partir d'une première note de fréquence  $f_1$ , on construit une deuxième note situé une quinte plus loin  $f_2 = 3/2f_1$ , puis une troisième note une quinte plus loin  $f_3 = 3/2f_2$  et ainsi de suite. Si une note  $f_n$  dépasse la fréquence  $2f_1$  elle devient plus grande que l'octave de  $f_1$ , afin de rester dans l'intervalle compris dans une octave, i.e.  $[f_1, 2f_1]$ , on divise par 2 cette fréquence  $f_n$ , c'est à dire que l'on retient la note une octave plus bas.

- Les 5 premières notes générées par cette procédures conduisent à la gamme *pentatonique* qui est utilisée dans la plupart des cultures depuis plus de 2000 ans.

16. Il y a évidemment des raisons *physiologiques* sous-jacente à cette observation. Pour des raisons sûrement évolutives, l'oreille (ou plus précisément la cochlée) est un capteur logarithmique cela assure une meilleure résolution dans les basses fréquences que dans les hautes fréquence.

17. Ce que l'on appelle un accord en langage musical

- Les 7 premières notes reproduisent une gamme occidentale (le classique do ré mi fa sol la et si en France, c'est à dire les touches blanches d'un piano).
- Les 12 premières notes reproduisent l'ensemble des notes que l'on trouve sur les octaves d'un piano (do do# ré re# mi fa fa# sol sol# la la# et si, c'est à dire les touches blanches et noires d'un piano).

7. Partons d'une fréquence de base  $f_1 = 260$  Hz que l'on appelle arbitrairement "do". Construire la gamme pythagoricienne (i.e lister les fréquences) jusqu'à la treizième note. Montrer que la fréquence de cette treizième note est très proche de la fréquence de la note de départ. Quelle est l'écart relatif<sup>18</sup> entre ces deux fréquences? Cette proximité en terme de fréquence entre la première et la treizième note fait que l'on ne conserve, en musique occidentale, que 12 notes pour écrire toute la musique.

Le fait que l'on ne tombe pas exactement sur la même fréquence que la note de départ au bout de 12 quintes est artificiellement compensée en faisant qu'une quinte parmi les 12 n'est pas un ratio de fréquence de  $3/2$  mais de 1.48. Cette quinte est connue sous le nom de "quinte du loup".

8. La gamme pythagoricienne présente un deuxième problème.

A priori, on aimerait que toutes les harmoniques d'un son périodique aient une équivalence parmi les douze notes de la gamme pythagoricienne.

La deuxième harmonique, à  $f_2 = 2f_1$ , est la note fondamentale à l'octave et se trouve donc dans les notes de la gammes. La correspondance entre cette harmonique et une des notes de la gamme est donc validée.

Nous venons d'étudier à la question précédente la 3ème harmonique, à  $f_3 = 2f_1$ , et qui correspond à une quinte. A part le problème de la quinte du loup, il y bien une correspondance entre la 3ème harmonique d'une onde se propageant sur une corde fixée à ses deux extrémités et une des notes de la gamme pythagoricienne (si on choisit comme note de départ le do avec  $f_1 = 260$  Hz, la quinte et la note sol à  $f_3 = 3/2 \times 260 = 390$  Hz).

La quatrième harmonique, à  $f_4 = 4f_1$ , est simplement la note du fondamentale 2 octaves au dessus. La correspondance entre cette harmonique et une des notes de la gamme est donc validée.

Intéressons nous maintenant à la cinquième harmonique, à  $f_5 = 5f_1$ , celle qui va poser problème.

- (a) Quelle note de la gamme pythagoricienne est la plus proche en fréquence de la cinquième harmonique?
- (b) Quelle est l'écart relatif entre les deux?

L'écart entre la note fondamentale et la 5ème harmonique<sup>19</sup> est appelée tierce majeure. Cette écart<sup>20</sup> est notable pour notre oreille ce qui a fait que, historiquement, la tierce majeur a longtemps été considérée comme dissonant alors qu'elle est considérée comme

18. L'égalité est presque vrai car nous avons successivement multiplier 12 fois par  $3/2$  pour former les notes, ce qui conduit à une multiplication de  $f_1$  par  $(3/2)^{12} \approx 129.7$ , or cette quantité est très proche de  $2^7 = 128$  qui veut dire 7 octaves plus haut. Au bout de 12 quintes pythagoricienne, on ne tombe pas exactement sur 7 octaves mais pas loin (i.e. 1% près)

19. remise dans l'octave du fondamentale c'est à dire donc avec une fréquence divisée par 4

20. Il est due au fait que mathématiquement  $(3/2)^4 \approx 5.06 \neq 5$

agréable (i.e. consonante) de nos jours (cf gamme tempérée plus bas) considérée comme consonant.

21. où les quintes ne valent plus  $3/2 = 1.5$  mais 1.495 de telle sorte que la 5ème harmonique soit bien à  $1.495^4 \approx 5$  ce qui corrige donc la justesse des tierces mais augmentes le problème de la quinte du loup.

22. Notons bien que l'on parle ici des instruments à notes fixes c'est à dire où la longueur de l'élément vibrant prend des valeurs discrètes. Cela n'est plus vrai pour les instruments ayant des valeurs continues comme le violon où la longueur d'une corde peut prendre n'importe quelle valeur ou comme le trombone à coulisse où la taille du tuyau sonore est continument variable. Pour le chant, c'est en grande partie la tension des cordes vocales qui est continument variable

23. Au mathématique viennent en plus s'ajouter les problèmes de physique. La fréquence fondamentale d'une corde n'est pas exactement  $f = c/2L$ , en effet, si on prend en compte le fait que la corde n'est pas inextensible la fréquence devient :

$$f = f_0 \left( 1 + \frac{\pi}{2} \frac{EA^2 \mu}{T} f_0^2 \right)$$

où  $f_0 = c/2L$ ,  $E$  est le module de Young et  $A$  la surface de la corde. En d'autre terme la corde est un milieu dispersif... Voir à ce sujet la lettre qu'envoya Feynman à son accordeur de piano <https://tinyurl.com/yc064jw6>

24. Il s'agit en effet d'une convention. La fréquence de ce La de référence a d'ailleurs changée de quelques pourcents selon les époques et les endroits géographiques. Le La<sub>3</sub> avec une fréquence  $f_3 = 432$  serait considéré "meilleur" par une certaine communauté pour des raisons totalement ésotériques (il n'y a évidemment aucune référence meilleure qu'une autre, le choix est arbitraire)

*La gamme tempérée* La gamme pythagoricienne présente plusieurs problèmes comme la quinte du loup et le fait que les tierces soit légèrement fausses. Plusieurs autre gamme, comme la gamme mésotonique<sup>21</sup> ou la gamme naturelle ont été mises au points pour essayer de régler ces problèmes

A vrai dire, il est impossible<sup>22</sup>, mathématiquement parlant<sup>23</sup>, de trouver un accordage qui serait parfait, c'est à dire où toutes les 12 notes correspondrait chacune exactement à des harmoniques de la note du fondamentale. A chaque fois que l'on règle un problème, on en aggrave à un autre.

Partant de ce constat, la gamme tempérée a été construite. Dans la gamme tempérée toute les notes sont fausses mais les écarts entre les fréquences de ces notes et les harmoniques sont trop faibles pour être perceptible par notre oreille (et notre cerveau). En d'autre terme, plutôt que d'essayer de régler un problème dans la gamme pythagoricienne tout en en aggravant un autre, on saupoudre les erreurs sur l'ensemble des notes de la gamme.

Dans la musique occidentale moderne une octave est divisée en 12  $1/2$  tons *égaux*.

9. La note de de référence<sup>24</sup> est depuis maintenant plus d'un siècle le La<sub>3</sub> ("le" La des diapasons) de fréquence  $f_3 = 440$  Hz. Donner la fréquence des 11 autres notes comprises entre le La<sub>3</sub> et le La<sub>4</sub>.

10. Quelle est l'écart relatif en fréquence entre la quinte donnée par la gamme tempérée et celle dictée par la physique des ondes sur une corde fixée à ses deux extrémités ?

11. Même question pour la tierce.

*Accord parfait* Un accord parfait est la superposition de 3 notes. Une note dite fondamentale, une tierce majeur et une quinte. Cette accord sonne particulièrement bien à notre oreille.

1. Expliquer cette constatation expérimentale en vérifiant que les harmoniques de la note fondamentale contiennent, modulo plusieurs octaves, la fréquence fondamentale de la quinte et la tierce majeur.
2. Expliquer par le même raisonnement pourquoi l'accord do - do# est très dissonant à nos oreilles.

*Un instrument de musique : la guitare*

*Position de la rosace* On reprend le cas de la guitare dont les cordes sont pincées (cf ex 9.5.1). Cependant, on considère que l'on peut pincer la corde n'importe où sur le manche.

Soit donc le profil de la corde au temps  $t = 0$  :

$$y(x, 0) = \begin{cases} (h/a)x, & \text{pour } 0 \leq x \leq a \\ (h/(a-L))(x-L), & \text{pour } a < x < L \end{cases} \quad (9.16)$$

Elle est lâchée sans vitesse initiale.

1. L'harmonique  $n = 7$  est réputée comme non musical. Où exciter la corde pour la faire disparaître ?

*Corde grattée avec les doigts* Si les cordes d'une guitare ne sont pas pincées mais jouées avec les doigts, la forme de la corde de longueur  $L$  à  $t = 0$  peut être schématisée par la fonction suivante :

$$y(x, 0) = \frac{4h}{L^2}x(L-x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad (9.17)$$

1. Calculer les amplitudes des différentes harmoniques présents dans la corde
2. Comparé au son de la guitare pincée (cf ex 9.5.1), le son se rapproche-t-il d'un son sinusoïdale ?

*Harmoniques naturelles* Il est possible pour un guitariste de changer le timbre produit par une corde de guitare en appuyant légèrement son doigt en certains point de la corde. On parle d'harmonique naturelle

La figure ?? montre le contenu spectrale d'une corde dont on a délicatement appuyée en son milieu. Même chose pour la figure ??, mais en  $x = L/$

*Les instruments à vent*

*La flute* La flute est modélisée par un tuyau de section  $S$  et de longueur  $l$ . Il contient un fluide pour lequel la célérité des ondes est  $c$ . Les extrémités<sup>25</sup> sont ouvertes sur l'atmosphère, qui y impose la pression  $P_0$ .

On décompose l'onde sonore engendré par le souffle<sup>26</sup> du flutiste en onde plane monochromatique. L'onde initiale est propagative et se réfléchit aux extrémités.

1. Quelles sont les deux conditions aux limites au niveau des extrémités ?
2. En considérant l'onde incidente et l'onde réfléchi et le système d'onde stationnaire ainsi créé, établir les pulsations des modes permettant de décomposer le champ de surpression.
3. Une flute émet un do à 264 Hz quand tout les trous sont bouchés et que la température de l'air est de 20 °C. Quelle est la longueur  $l$  de la flute sachant que seul le mode fondamentale est excitée ?

25. Le biseau où on souffle est considéré comme une extrémités ouvertes

26. Ce n'est pas l'air due aux souffle du flutiste qui se propage dans la flute. Le souffle envoyé sur le biseau de la flute, dans le cas d'une flute à bec),ou envoyé à 90° dans le cas d'une flute traversière ou une flute de Pan, permet de mettre en vibration l'air par un phénomène d'oscillation de relaxation.

- 27. On obtient cette effet avec une flute à bec grâce aux trous de registre que l'on actionne avec son pouce. L'ouverture de ce trou déstabilise le mode fondamentale au profit des modes suivants
- 28. Ce que l'on obtient, par conservation du débit, en resserrant les lèvres.
- 29. Une anche est un lamelle traditionnellement faite en roseau. Sous l'action de l'air, l'anche vibre et transfère l'énergie de cette vibration à la colonne d'air. L'anche peut être libre comme dans l'harmonica ou l'accordéon, ou bien raccordée à un point fixe (on parle alors d'anche battante). Une anche battante peut être simple, comme pour le saxophone ou la clarinette ou double (comme dans le hautbois)

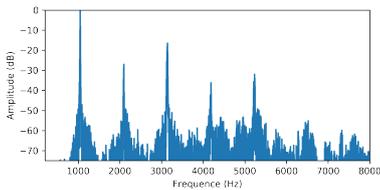


FIGURE 9.10: Spectre d'une note (do) jouée à la flute traversière

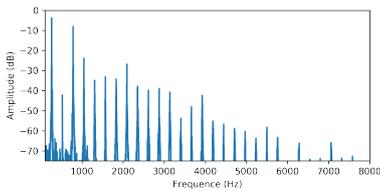


FIGURE 9.11: Spectre d'une note (do) jouée à la clarinette

- 4. Quelle est la fréquence de la même note si la température est maintenant de 20°C toute chose étant égale par ailleurs. Il est possible d'accorder la flute en changeant finement sa longueur  $l$ ? De combien faut-il changer la longueur  $l$  initiale pour accorder la flute.
- 5. Ou placer un trou pour obtenir un ré à 294 Hz dans une atmosphère à 20°C?
- 6. Avec une flute traversière, on obtient des notes une octave plus aiguë<sup>27</sup> en soufflant de l'air avec une plus grande vitesse<sup>28</sup>. Expliquer qualitativement ce phénomène.

*La clarinette* Une clarinette est un instrument à anche<sup>29</sup>. On considère que la clarinette à les mêmes dimensions géométriques que la flute décrite plus haut.

Nous allons modélisée l'anche comme une extrémité fermée.

- 7. Quelles sont les deux conditions aux limites au niveau des extrémités?
- 8. En considérant l'onde incidente et l'onde réfléchi et le système d'onde stationnaire ainsi créé, établir les pulsations des modes permettant de décomposer le champ de surpression.
- 9. La figure 9.11 présente le spectre d'une note jouée à la clarinette et la figure 9.10 le spectre d'une même note (à l'octave) jouée par une flute traversière. A partir du modèle simple développé dans cet exercice, essentiellement basé sur la notion d'extrémité fermée ou libre, expliquer la l'amplitude relativement faible de l'harmonique 2 et relativement de l'harmonique 3 pour la clarinette.

*Le clairon* Le clairon est un instrument de la famille des cuivres qui ne contient pas de piston pour changer la longueur du tuyau sonore. Pourtant il est possible de jouer plusieurs notes avec un tel instrument. Ces notes sont typiquement Si bémol ( $f_{SiB} = 466$  Hz), le même Si bémol mais une octave plus haut, un fa ( $f_{Fa} = 1400$  Hz)), à nouveau un Si bémol mais deux octaves plus haut, puis un ré  $f_{Re} = 2330$  Hz, les notes suivantes (fa puis la bémol) sont difficiles à obtenir.

- 10. Expliquer pourquoi uniquement ces notes sont accessibles avec un clairon.

## 9.6 CQFR

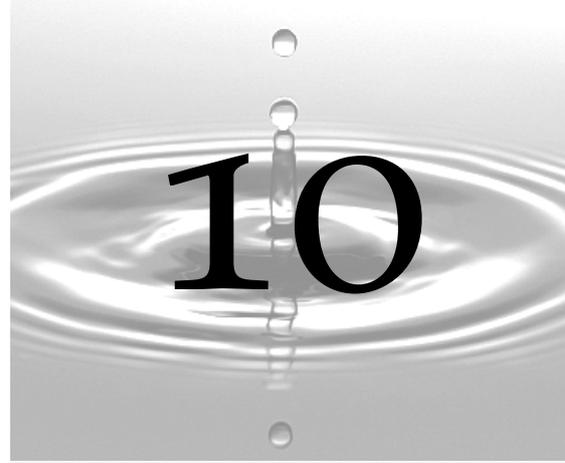
### Connaissances

1. Une onde stationnaire est une onde qui oscille sur place et qui est créée par l'interférence d'une onde plane harmonique progressive avec une onde plane harmonique régressive de même pulsation.
2. Une onde stationnaire est une onde où la dépendance spatiale et la dépendance temporelle de l'onde sont *découplées*.
3. Toute onde sur une corde de longueur finie  $L$  peut être décomposée en une somme infinie de modes propres. Ces modes propres sont des *ondes stationnaires* dont les vecteurs d'onde (pour la forme du mode) et les pulsations (pour l'oscillation harmonique) sont *quantifiées* par les conditions aux limites.
4. Tout comme une chaîne de  $N$  oscillateurs, la corde rentre en résonance lorsqu'elle est excitée à une pulsation  $\omega$  proche de la pulsation  $\omega_n$  d'un de ses modes. La corde prend alors comme profil la forme du mode  $n$ .
5. Connaitre la forme des modes de la corde lorsqu'elle est fixée à ses deux extrémités.
6. Les ondes stationnaires de la grandeur lié à la déformation et celle lié à la contrainte sont décalées d'un quart de longueur d'onde.
7. L'expérience de la corde de Melde permet de mettre en évidence expérimentalement le profil des modes de la corde et de mesurer les pulsations propres associées.
8. Une onde stationnaire ne transporte pas d'énergie.

### Savoir-faire

1. Savoir exploiter une condition aux limites, corde fixe (impédance infinie) et corde libre (impédance nulle) pour retrouver la forme des ondes stationnaires associées.
2. Savoir utiliser une deuxième condition aux limites pour trouver la forme que prend la quantification du vecteur d'onde des ondes stationnaires.
3. Pouvoir écrire la forme générale d'une onde sur une corde de longueur finie.
4. Pouvoir montrer qu'une onde stationnaire ne transporte pas d'énergie.





## 10 Milieu absorbant et dispersif

LES ONDES que nous avons étudiées jusqu'à maintenant sont solution de l'équation de d'Alembert. Elle se propagent sans déformation.

Lorsque l'on évoque le terme de déformation d'une onde, on pense généralement en premier lieu à l'absorption : l'amplitude de l'onde diminue au fur et à mesure qu'elle cède de l'énergie au milieu extérieur. Nous allons voir qu'il existe aussi une autre cause de déformation de l'onde qui est plus subtile. Cette dernière est due fait que dans un milieu dit *dispersif*, la vitesse d'une onde plane et monochromatique dépend de sa pulsation  $\omega$ . A vrai dire, nous verrons que dispersion et absorption sont intimement liées et que l'on ne peut avoir l'une sans l'autre.

Nous insisterons ensuite à nouveau sur le fait qu'une onde plane monochromatique est un objet mathématique qui n'a pas, *stricto sensu*, de réalité physique. Afin de créer une onde capable de transmettre de l'information, nous allons devoir utiliser des *sommes* d'ondes planes monochromatiques appelées *paquet d'onde*.

Nous étudierons ensuite l'impact de la dispersion sur la propagation d'un paquet d'onde. Nous verrons que lorsque la dispersion est peu marquée, l'enveloppe de l'onde se déplace avec une vitesse appelée vitesse de groupe. Lorsque la dispersion est plus prononcée, le paquet d'onde, tout en déplaçant à la vitesse de groupe, aura tendance à s'étaler au cours de la propagation.

### 10.1 Dispersion et absorption d'une onde sur une corde

#### 10.1.1 Prise en compte de forces dissipatives

Revenons sur l'exemple très visuel de la propagation d'une onde le long d'une corde. Considérons maintenant que que la corde est effilochée ou alors prenons tout simplement en compte les frottements de l'air ou encore le fait que l'énergie de la corde est transmise à la caisse de résonance d'un instrument de musique. Bref, prenons en

### Sommaire

<b>10.1</b> Dispersion et absorption d'une onde sur une corde. . . . .	163
<b>10.2</b> Vitesse de phase . . . . .	165
<b>10.3</b> Une onde plane monochromatique n'existe pas. . . . .	166
<b>10.4</b> Milieu dispersif et paquet d'onde. . . . .	170
<b>10.5</b> Un exemple : la relation de dispersion de Klein Gordon. .	173
<b>10.6</b> TD 10 . . . . .	175
<b>10.7</b> CQFR . . . . .	178

compte une force de dissipation de l'énergie de l'onde vers l'extérieur.

Nous allons supposer que l'on peut modéliser ces forces dissipatives par des frottements de fluides. Nous les modélisons donc, pour un élément de corde de longueur  $dx$ , par :

$$df = -\mu \frac{v}{\tau} e_y = -\frac{\mu}{\tau} \frac{\partial a}{\partial t} e_y$$

En reprenant les développements du chapitre 5, nous arrivons à une nouvelle équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 a(x, t)}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial a}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 a(x, t)}{\partial x^2} = 0 \tag{10.1}$$

10.1.2 Les solutions de l'équation d'onde

1. Soit une onde plane de la forme :

$$a(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

Une fois injectée dans l'équation 10.1 nous obtenons :

$$\frac{\partial^2 f(x - ct)}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial f(x - ct)}{\partial t} \stackrel{?}{=} c^2 \frac{\partial^2 f(x - ct)}{\partial x^2}$$

$$\begin{aligned} (-c)^2 \frac{d^2 f(x - ct)}{du^2} + \frac{1}{\tau} (-c) \frac{\partial f(x - ct)}{\partial u} \\ \stackrel{\text{non}}{=} c^2 \times (1)^2 \frac{d^2 f(x - ct)}{du^2} \end{aligned}$$

NB : les ondes monochromatiques planes qui satisfont la relation de dispersion (voir plus bas) sont elles bien solution de l'équation 10.1

Les ondes planes ne sont manifestement <sup>1</sup> plus solution de l'équation d'onde 10.1...

Par contre cette équation est toujours *linéaire*. Nous pouvons donc utiliser la méthode exposée à la section 6.4.1. Cette méthode consiste à recréer un signal quelconque grâce à une somme d'onde plane harmonique. Comme nous allons le voir la solution de l'équation d'onde est facile à obtenir pour une telle onde. Une fois la solution obtenue pour une onde plane harmonique quelconque, on reconstruit la solution quelconque comme une somme d'onde plane solutions de l'équation d'onde.

Cherchons donc les conditions que doivent satisfaire une onde plane monochromatique pour être solution de l'équation d'onde 10.1. Le système étant unidimensionnel, l'OPM s'écrit sous forme complexe :

$$\underline{a}(x, t) = \underline{A} e^{i(\omega t - kx)}$$

ce qui donne une fois injectée dans l'équation d'onde et simplification par  $\underline{a}(x, t)$  :

$$-\omega^2 + i \frac{\omega}{\tau} + c^2 k^2 = 0$$

soit :

$$c^2 k^2 = \omega^2 - i \frac{\omega}{\tau} \tag{10.2}$$

Nous obtenons alors une relation entre la périodicité spatiale  $k$  et la périodicité temporelle  $\omega$  de l'OPM imposée par le milieu de propagation : c'est la *relation de dispersion*. Faits nouveaux, le vecteur d'onde  $\underline{k}$  est *complexe* et la relation de dispersion n'est *pas linéaire*.

Le vecteur d'onde peut donc s'écrire <sup>2</sup> :

$$\underline{k}(\omega) = k_1(\omega) - ik_2(\omega)$$

Si nous reportons l'expression complexe du vecteur dans la définition d'une OPH, nous obtenons :

$$\underline{a}_{\text{Sol Eq. Onde}}(x, t) = \underline{A} e^{i(\omega t - (k_1 + ik_2)x)}$$

2. L'obtention de la partie réel et imaginaire du vecteur d'onde  $\underline{k}$  à partir de la relation de dispersion 10.2 n'est pas immédiate car cette équation met en jeu  $k^2$ . Nous pouvons alors écrire :

$$k_1^2 - k_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

et

$$2k_1 k_2 = \frac{\omega}{c\tau^2}$$

pour obtenir  $k_1$  et  $k_2$

soit :

$$\underline{a}_{\text{Sol Eq. Onde}}(x, t) = \underline{A}e^{-k_2x}e^{i(\omega t - k_1(\omega)x)} \quad (10.3)$$

soit aussi en notation réelle :

$$a(x, t) = Ae^{-k_2x} \cos(\omega t - k_1(\omega)x) \quad (10.4)$$

Nous voyons alors que la partie réelle  $k_1$  et la partie imaginaire  $k_2$  du vecteur d'onde ne jouent pas le même rôle.

### 10.1.3 Absorption

La partie imaginaire  $k_2$  du vecteur d'onde amène un terme en  $e^{-k_2x}$  qui conduit<sup>3</sup> à une diminution de l'amplitude de l'OPH au fur et à mesure de sa propagation.

La décroissance exponentielle est caractérisée par la longueur de pénétration  $\delta$  :

$$\delta = \frac{1}{k_2} \quad (10.5)$$

### 10.1.4 Dispersion

La partie réelle  $k_1$  du vecteur d'onde rentre en jeu dans la propagation de l'onde. Nous allons voir par la suite que la dépendance de  $k_1$  par rapport à la pulsation  $\omega$  conduit au fait que le milieu sépare progressivement des ondes planes monochromatiques de pulsation différentes : c'est le phénomène de *dispersion*.

## 10.2 Vitesse de phase

### 10.2.1 Vitesse de phase

Revenons sur l'expression d'une onde plane monochromatique ou nous négligeons pour l'instant l'absorption :

$$a(x, t) = A \cos(\omega t - k_1x + \Phi)$$

Par définition d'une onde plane tout les points faisant partie d'un même plan d'onde ont la même amplitude. Plus précisément, tous les points ayant la même phase  $\varphi$  :

$$\varphi(x, t) = \omega t - k_1x + \Phi$$

ont la même amplitude.

Soit deux point  $M_1$  et  $M_2$  d'abscisse respective  $x_1$  et  $x_2$  et observés à deux temps distincts  $t_1$  et  $t_2$ . Ces deux points présentent le même état vibratoire si

$$\omega t_1 - kx_1 = \omega t_2 - kx_2$$

et donc si :

$$x_2 - x_1 = \frac{\omega}{k}(t_2 - t_1)$$

3. La relation de dispersion impose :

$$k_1k_2 = -\frac{1}{2} \Im(k^2) = \frac{\omega^2}{2c^2\tau} > 0$$

Si  $k_1 > 0$ , c'est à dire si l'OPH se propage vers les  $x$  croissants, alors  $k_2$  est positif et inversement si  $k_1 < 0$  : l'atténuation a lieu dans le sens de propagation. Il y a bien absorption. Il existe cependant des milieux pour lesquelles  $k_1k_2 < 0$  et où l'onde gagne de l'énergie provenant du milieu de propagation, c'est le cas par exemple dans les milieux à gain des lasers.

En faisant tendre  $x_2$  vers  $x_1$  et  $t_2$  vers  $t_1$ , le plan de phase se déplace à la vitesse de phase  $v_\varphi \equiv dx/dt$  qui vaut :

Definition de la vitesse de phase

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k_1} = \frac{\omega}{\Re(\underline{k})} \quad (10.6)$$

4. Si la relation de dispersion n'est pas linéaire, comme c'est le cas pour une corde amortie par exemple, la vitesse de phase  $v_\varphi$  dépend de  $\omega$ .

La vitesse de phase correspond à la vitesse<sup>4</sup> qu'aurait par exemple un point à l'un des maxima d'une onde plane harmonique se propageant dans un milieu. Lorsqu'il n'y a pas de dispersion, la relation de dispersion donne  $k = \omega/c$  et par conséquent  $v_\varphi = c$ , une onde plane monochromatique se déplace à la vitesse de propagation figurant dans l'équation d'onde.

### 10.3 Une onde plane monochromatique n'existe pas

Cela peut sembler paradoxal mais l'onde plane harmonique, qui constitue la brique de base pour décomposer n'importe qu'elle onde, n'est pas, en soit, un signal physique. En effet, une "vraie" onde plane harmonique doit :

- d'une part, occuper tout l'espace ("tout l'univers")
- d'autre part durer, éternellement.

5. Il s'agit néanmoins souvent d'une excellente approximation.

En effet, considérons une nanoparticule métallique de taille caractéristique 10 nm dont on veut étudier la diffusion et donc implicitement le mouvement des électrons, phénomène qui s'effectue avec un temps caractéristiques de l'ordre de 100 fs.

Un faisceau laser à une extension de l'ordre du  $\text{mm}^2$  ce qui peut être considéré comme infinie par une particule faisant 10 nm; un faisceau laser est donc une très bonne approximation d'une onde plane.

D'autre part, un faisceau laser de type hélium-néon (avec une bande spectrale de l'ordre de 0.1 nm), a une longueur de cohérence de l'ordre du mètre ce qui donne une durée de train d'onde de l'ordre de la ns ce qui peut sembler très court, mais à l'échelle de la dynamique des électrons, une ns peut être considéré comme une durée quasi-infinie et le laser est donc monochromatique.

En ce sens, un faisceau laser, qui est souvent donné comme exemple en optique, pour décrire une onde plane monochromatique n'est pas, *stricto sensu*, une onde plane monochromatique *parfaite*<sup>5</sup>. En effet :

- L'amplitude du faisceau est limité dans l'espace, le faisceau est par exemple circulaire avec un diamètre de 1 mm. Une vraie onde plane, a une intensité constante sur un plan parcourant "tout" l'univers (avec donc une intensité totale tendant vers l'infini).
- L'onde laser n'a pas une durée infinie, le laser a été allumé au début de l'expérience et éteint à la fin. Une vraie onde monochromatique, est obtenue à partir d'une onde qui dure *éternellement*, du "début" à la fin de l'univers .

Nous voyons donc que lorsqu'une onde est purement plane, c'est à dire mathématiquement qu'elle n'est constituée que d'un seul et unique vecteur d'onde  $\underline{k}$ , alors on ne peut pas situer précisément l'onde dans l'espace, elle est à la fois partout et n'importe où dans un plan infini.

Nous voyons aussi que lorsqu'une onde est purement monochromatique, c'est à dire mathématiquement qu'elle n'est constituée que d'une seule et unique pulsation  $\omega$ , alors on ne peut pas situer l'onde dans le temps, elle est à la fois partout et n'importe où dans le temps (même le futur...).

Ces relations d'incertitudes entre le vecteur d'onde  $\underline{k}$  et la position  $x$  et la pulsation  $\omega$  et le temps  $t$  découlent mathématiquement du fait

que ces grandeurs sont conjuguées par des transformée de Fourier (voir annexe ??).

L'impossibilité de connaître exactement à la fois le vecteur d'onde  $k$  et la position  $x$  ou de connaître à la fois la pulsation  $\omega$  et la position temporelle  $t$  n'est pas sans rappeler les inégalités d'Heisenberg en mécanique quantique<sup>6</sup>. A partir du moment où on accepte que les particules se comportent comme des ondes, elles doivent en avoir toutes les caractéristiques. Le fait de donner naissance à des interférences en est une, mais l'impossibilité de connaître parfaitement simultanément deux grandeur conjuguées (comme la position  $r$  et le vecteur d'onde  $k$ ) en est une autre. En d'autre terme, les relations d'Heisenberg ne sont que des conséquences logiques du fait que toutes particules se comportent comme une onde<sup>7</sup>.

Une onde plane monochromatique n'a donc pas de réalité physique. En même temps, il aurait été *impossible* de *transmettre de l'information* avec une onde plane monochromatique. En effet, pour transmettre de l'information, il faut pouvoir créer des modulations, temporelle et/ou spatiale, du signal. Dans le cas du Morse, par exemple, c'est l'alternance de signaux courts et longs qui code le message. Mais, avec une onde plane monochromatique qui dure éternellement, il est impossible d'avoir la moindre modulation du signal, sinon l'onde ne dure plus éternellement et n'est donc plus absolument exactement monochromatique.

### 10.3.1 Paquet d'onde

Comme nous venons de le voir, une onde plane monochromatique, prise seule, n'a pas de réalité physique. Pour construire une onde qui existe réellement, il faut considérer une *somme* d'ondes planes monochromatiques avec différentes pulsations  $\omega$  et différents vecteurs d'onde  $k$ . Cette somme est appelée *paquet d'onde*.

Au fur et à mesure que l'on ajoute des ondes planes monochromatiques (OPM) avec différentes pulsations  $\omega$  et différents vecteurs d'onde  $k$  au paquet d'ondes :

- On perd en précision sur le vecteur d'onde  $k$  et la pulsation  $\omega$  du paquet d'onde,
- en contrepartie, l'onde résultante de cette somme est de plus en plus localisée dans l'espace et le temps.

Nous allons illustrer cette localisation en construisant un paquet d'onde contenant de plus en plus d'OPM.

*Somme de deux ondes planes monochromatiques* Commençons par la somme de deux ondes monochromatiques. Les deux ondes sont en phases en  $x = 0$  et à  $t = 0$ , la première onde a une pulsation  $\omega_1$  et donc un nombre d'onde  $k_1 = k(\omega_1)$  via la relation de dispersion<sup>8</sup>, la deuxième a une pulsation  $\omega_2$  (avec  $\omega_2 > \omega_1$ ) et un vecteur d'onde  $k_2 = k(\omega_2)$ .

6. Ce qui est d'autant plus patent si on ajoute les relations de DE BROGLIE,  $p = \hbar k$  et la relation de PLANCK  $E = \hbar \omega$  qui relie le monde des ondes au monde des particules.

Connaître parfaitement le vecteur d'onde  $k$  revient donc à connaître parfaitement l'impulsion  $p$ . Par conséquent, lorsque l'on connaît parfaitement l'impulsion  $p$ , on ne sait plus où la position  $(x, y)$  car elle peut se trouver n'importe où et partout dans un plan infini.

Connaître parfaitement la pulsation d'onde  $\omega$  revient donc à connaître parfaitement l'énergie  $E$ . Par conséquent, lorsque l'on connaît parfaitement l'énergie  $E$ , on ne sait plus où se situe temporellement l'onde car elle peut se trouver n'importe où et partout sur l'axe des temps.

7. Mais aussi à la fois comme un corpuscule. Le vrai nœud du mystère se situe dans cette dualité onde-corpuscule qui est postulée mais dont l'origine est encore à découvrir...

8. Si l'équation d'onde est une équation de d'Alembert alors on a bien  $k_1 = \omega_1/c$ , mais il s'agit d'un cas particulier, la relation de dispersion est en générale plus compliquée, on la note donc sobrement  $k(\omega)$ .

Supposons de plus que les pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont voisines et notons :

$$\omega_m = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad \text{et} \quad \delta\omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \ll \omega_m$$

$$k_m = \frac{k_1 + k_2}{2} \quad \text{et} \quad \delta k = \frac{k_1 - k_2}{2}$$

La somme des deux ondes planes monochromatiques s'écrit donc :

$$a(x, t) = a_0 \cos(\omega_1 - k_1 x) + a_0 \cos(\omega_2 - k_2 x)$$

ce qui peut se réécrire :

$$\begin{aligned} a(x, t) &= (2a_0 \cos(\delta\omega t - \delta k x)) \cos(\omega_m t - k_m x) \\ &= a_m(x, t) \cos(\omega_m t - k_m x) \end{aligned}$$

En effet, le terme  $\cos(\delta\omega t - \delta k x)$  varie beaucoup plus lentement que le terme  $\cos(\omega_m t - k_m x)$  est joué donc le rôle d'enveloppe. On retrouve un comportement aux battements évoqués à la section 2.3.2 p.33.

L'onde résultante est représentée sur la figure 10.1. On peut y discerner deux signaux :

- Le signal qui évolue rapidement dans le temps et l'espace  $\cos(\omega_m t - k_m x)$  et qui se propage à la vitesse de phase  $v_m = \omega_m / k_m$
- L'enveloppe du signal qui se propage à la vitesse :

$$v_g = \frac{\delta\omega}{\delta k} \approx \frac{d\omega}{dk}$$

que l'on appelle vitesse de groupe (voir plus bas section 10.4.3)

L'onde est partiellement localisée. Elle se situe en majorité là où l'enveloppe est maximale.

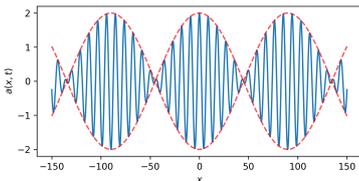


FIGURE 10.1: Onde résultante, à  $t = 0$ , de la somme de deux ondes planes monochromatiques avec deux pulsations (et donc deux nombre d'ondes via la relation de dispersion) légèrement différentes. L'enveloppe est en pointillée.

*Somme continue d'onde planes monochromatiques* La figure 10.2 montre l'effet de l'augmentation du nombre d'ondes planes sur la localisation<sup>9</sup> du paquet d'ondes. Comme annoncé, plus le nombre d'onde plane composant le paquet d'onde est important plus ce dernier est localisé (dans le temps et l'espace).

La figure 10.3 permet de mieux comprendre l'origine de cette localisation. Nous voyons que l'amplitude du paquet d'onde n'est importante que lorsque les ondes planes monochromatiques qui le composent sont toutes *en phase* et sont en *interférences constructives*. En dehors de ces zones, la phase relative entre les différentes composantes du paquet d'onde peut être vue comme une variable aléatoire<sup>10</sup> et la somme de ces phases aléatoires conduit inéluctablement à des *interférences destructives* et donc à une amplitude faible, voire nulle, du paquet d'onde.

9. L'effet périodique est due au choix des pulsations qui sont équi-réparties. Avec des pulsations prises au hasard, cette périodicité disparaît (ou plus exactement est repoussée bien plus loin).

10. Plus exactement, il n'y a plus de *corrélation* entre les phases des différentes ondes planes harmoniques composant le paquet d'onde.

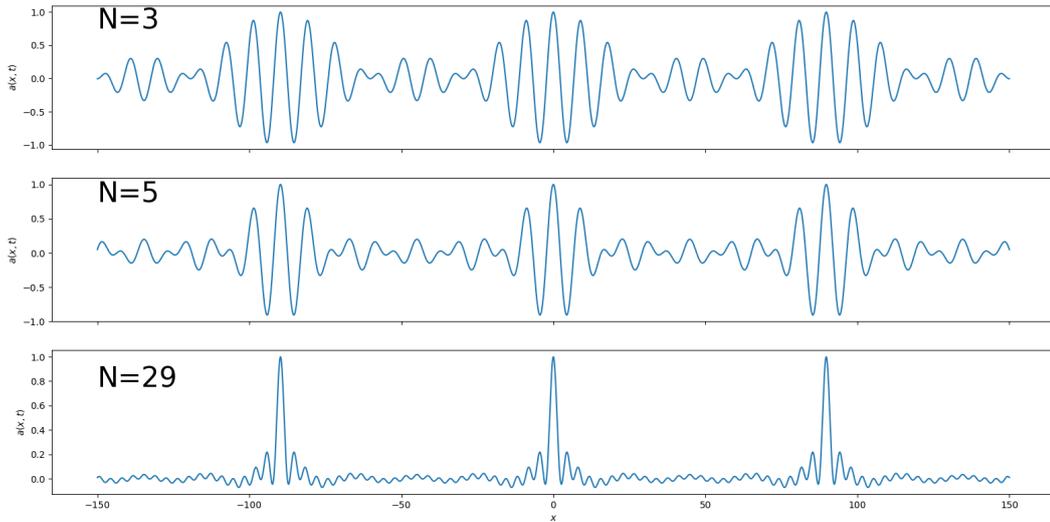


FIGURE 10.2: Paquet d’onde obtenues en sommant 3, 5 et 29 ondes planes monochromatiques avec des pulsations légèrement différentes.

Ainsi, si nous voulons obtenir un paquet d’onde localisé, c’est à dire avec une amplitude qui tombe à 0 là où l’onde n’a pas d’énergie, il faut sommer une *infinité* d’ondes planes monochromatiques de fréquences infiniment proches. Mathématiquement la somme devient une intégrale et nous pouvons écrire <sup>11</sup> :

Ecriture mathématique d’un paquet d’onde comme une somme continue d’onde planes monochromatiques vérifiant la relation de dispersion

$$a(x, t) = \underbrace{\int_0^\infty}_{\text{Somme pulsations}} \underbrace{\underline{A}(\omega)}_{\text{coeff pondération}} \times \underbrace{e^{i(\omega t - k(\omega)x)}}_{\text{OPH vérifiant eq. dispersion}} d\omega \quad (10.7)$$

Les coefficients  $\underline{A}(\omega)$  sont appelés *le spectre* du paquet d’onde  $a(x, t)$ . Ils indiquent à quel point le paquet d’onde est composé des ondes planes monochromatiques dont la pulsation est comprise entre  $\omega$  et  $\omega + d\omega$ .

A quelque détails près <sup>12</sup>, nous voyons que l’équation 10.7 est une transformée de Fourier. A vrai dire nous avons déjà établie au chapitre 6 (p.104) que toute onde peut être décomposée comme une somme infinie d’onde plane. La différence principale est qu’ici nous avons intégré la relation de dispersion <sup>13</sup> via l’écriture  $k(\omega)$ .

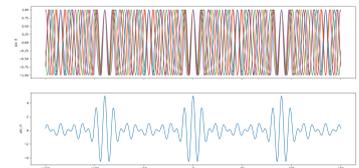


FIGURE 10.3: Un paquet d’onde, à  $t = 0$ , composé de cinq ondes dont les pulsations sont equi-répartis. La figure du haut est la juxtaposition sur le même graphe des cinq ondes planes monochromatiques, la figure du bas est leur somme ou, dit autrement, le paquet d’onde. Nous voyons que l’amplitude du paquet d’onde n’est importante que lorsque les ondes sont en phases.

11. Lorsque le coefficient  $\underline{A} = a$  est réel (c’est à dire qu’il n’y a pas de déphasage additionnel entre les ondes planes monochromatiques constituant le paquet d’onde) :

$$a(x, t) = \int_0^\infty a(\omega) \cos(\omega t - kx) d\omega$$

ce qui permet peut-être de mettre plus en évidence la somme d’onde plane monochromatique qui permet de construire le paquet d’onde  $a(x, t)$

12. L’intégrale ne va pas jusqu’à l’infinie, mais cela revient au même car un signal physique n’a dans son spectre que des pulsations positives, d’autre part le coefficient de normalisation est manquant.

13. On pourrait d'ailleurs faire aussi la décomposition :

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} d^3k \underline{\xi}(k) e^{i(\omega(k)t - kr)}$$

où  $\underline{\xi}(k)$  est le spectre angulaire du paquet d'onde, c'est à dire combien il faut de l'onde plane dont le vecteur d'onde est  $dk$  à  $d^3k$  près pour reconstruire le paquet d'onde. Ici on a écrit la relation de dispersion sous la forme  $\omega(k)$ .

14. NB : dans cette section nous ne tenons pas compte de l'absorption et par conséquent le nombre d'onde  $k$  est une quantité réelle. Tout les raisonnements tiennent encore dans le cas de milieu absorbant en remplaçant le nombre d'onde  $k$  par sa partie réelle  $k_1$ .

15.

$$k(\omega) = k(\omega_0) + (\omega - \omega_0)/c =$$

soit

$$k(\omega) = \cancel{k(\omega_0)} + k - \cancel{\omega_0}/c = k$$

16. Nous avons pris la borne inférieure de l'intégrale en  $-\infty$  pour faire apparaître la transformée de Fourier

### 10.4 Milieu dispersif et paquet d'onde

#### 10.4.1 Développement limité de la relation de dispersion

Considérons <sup>14</sup> un milieu peu dispersif et/ou un paquet d'onde ayant un spectre temporel assez étroit centré à la pulsation  $\omega_0$  de telle sorte que l'on puisse effectuer un *développement limité* de la relation de dispersion :

$$k(\omega) = k(\omega_0) + (\omega - \omega_0) \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_0} + \frac{1}{2} (\omega - \omega_0)^2 \left. \frac{d^2k}{d\omega^2} \right|_{\omega_0} + \mathcal{O}((\omega - \omega_0)^3) \tag{10.8}$$

#### 10.4.2 Milieu non dispersif

Tout d'abord si la relation de dispersion est celle de l'équation d'onde de d'Alembert,  $k = \omega/c$  alors  $d\omega/dk = 1/c$  et le terme d'ordre 2 est nul et tout calcul fait <sup>15</sup> le développement est exacte à l'ordre 1 comme nous allons le voir plus loin cela garantie que le paquet d'onde ne sera jamais déformé lors de la propagation.

#### 10.4.3 Dispersion peu prononcée

Par "dispersion peu prononcée", nous entendons que le développement limité peut être arrêter à l'ordre 1. Dit autrement, on a :

$$\frac{1}{2} (\Delta\omega)^2 \left. \frac{d^2k}{d\omega^2} \right|_{\omega_0} \ll \Delta\omega \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_0}$$

Ce qui peut se produire pour deux raisons :

- Le milieu est peu dispersif est le terme  $\left. \frac{d^2k}{d\omega^2} \right|_{\omega_0}$  est relativement faible.
- Le paquet d'onde est relativement étroit en fréquence et le terme  $\Delta\omega$  est relativement faible.

Étudions donc l'influence de l'ordre 1 du développement. Pour ce faire insérons le développement limité à l'ordre 1 de la relation de dispersion (eq. 10.8) dans le développement <sup>16</sup> en OPM du paquet d'onde (eq 10.7) :

$$a(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{A}(\omega) \exp \left( i(\omega t - \left[ k(\omega_0) + (\omega - \omega_0) \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_0} \right] x) \right) d\omega$$

ce que nous pouvons réécrire :

$$a(x, t) = e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{A}(\omega) \exp \left( i(\omega - \omega_0) \left( t - \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_0} x \right) \right) d\omega$$

avec  $k_0 = k(\omega_0)$  le nombre d'onde à la pulsation centrale du paquet d'onde obtenu via la relation de dispersion.

Nous pouvons identifier deux termes dans l'équation précédente :

$$a(x, t) = e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} \underline{\xi}_e(x, t)$$

avec

$$\xi_e(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{A}(\omega) \exp \left( i(\omega - \omega_0) \left( t - \frac{dk}{d\omega} \Big|_{\omega_0} x \right) \right) d\omega$$

Le paquet d'onde peut être donc décrit par une onde plane et monochromatique  $e^{i(\omega_0 t - k_0 x)}$  multipliée par une amplitude  $\xi_e(x, t)$  qui dépend elle aussi de  $x$  et de  $t$ .

Travaillons un peu sur cette amplitude  $\xi_e(x, t)$ . On ne peut pas connaître exactement la quantité  $dk/d\omega(\omega_0)$  tant que l'on ne connaît pas la relation de dispersion du système, par contre on sait déjà qu'il s'agit d'une quantité constante<sup>17</sup>. Notons cette quantité  $1/v_g$  car elle homogène à l'inverse d'une vitesse. Nous obtenons :

$$\xi_e(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{A}(\omega) \exp \left( i(\omega - \omega_0) \left( t - \underbrace{\frac{x}{v_g}}_{\text{Comme une onde plane}} \right) \right) d\omega$$

Nous reconnaissons dans le terme  $t - \frac{x}{v_g}$  l'expression d'une onde plane (cf chapitre 7 p.113). L'enveloppe est donc une combinaison linéaire (cf l'intégrale sur les pulsations) d'ondes se propageant à la vitesse  $v_g$ , par conséquent l'enveloppe elle aussi se propage à la vitesse  $v_g$ .

17. car on prend la valeur fonction  $dk/d\omega$  à la pulsation  $\omega_0$

**Paquet d'onde - Dispersion peu prononcée**

Un paquet d'onde, lorsque que l'on peut se limiter à l'ordre 1 de la relation de dispersion, est constitué du produit d'une onde porteuse modulée par une enveloppe :

- L'onde porteuse  $e^{i(\omega_0 t - k_0 x)}$  se propage à la vitesse de phase prise à la pulsation centrale du paquet d'onde :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k_0}$$

- L'enveloppe se propage, sans se déformer, à la vitesse de groupe prise à la pulsation centrale du paquet d'onde :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}(\omega_0)$$

La vitesse de groupe est la dérivée de la relation de dispersion prise à la pulsation centrale  $\omega_0$  du paquet d'onde.

10.4.4 Dispersion marquée

Le milieu est dispersif, et/ou le spectre de l'onde est assez large<sup>18</sup>. Il faut alors prendre en compte l'ordre 2 du développement limité. Les calculs sortent du cadre de ce cours de Licence. Le lecteur intéressé pourra consulter par exemple les ouvrages .

18. En optique, cela se produit pour les impulsions lasers de l'ordre de la centaine de femtoseconde. En effet, comme nous l'avons indiqué qualitativement plus haut, si l'impulsion est courte, son spectre est large. Ainsi pour une impulsion femtoseconde tout milieu de propagation autre que l'air est dispersif et la propagation tend à étaler temporellement l'impulsion ce qui est rarement souhaité.

Nous nous contenterons donc de simplement donner les conclusions du calcul à l'ordre 2.

Paquet d'onde - dispersion marquée

La dispersion du deuxième ordre se traduit par un étalement de l'enveloppe du paquet d'onde.

Le temps caractéristique de cet étalement dépend à la fois des propriétés du milieu et de la largeur initiale du paquet d'onde. Plus le paquet d'onde est riche en fréquence, plus l'étalement est rapide.

Notons que même si la dispersion est peu prononcée, si elle est effective sur une longue distance, comme cela est par exemple le cas dans le transport d'information par les fibres optiques, elle conduit tout de même à un étalement du paquet d'onde.

L'étalement d'une impulsion a de nombreuses conséquences pour le transfert des données en particulier dans le cas des ondes lumineuses se propageant dans une fibre optique. En effet, une impulsion lumineuse code la valeur binaire 1 et l'absence d'impulsion code la valeur binaire 0. Cependant, si l'impulsion s'étale au cours de sa propagation, elle peut déborder sur intervalle de temps qui était initialement prévu sans impulsion (0 binaire). Ainsi, à cause de l'étalement les valeurs binaires se mélangent et le signal est corrompu. Il faut donc espacer temporellement l'émission des impulsions, mais cela diminue le débit des informations que l'on peut envoyer.

Une foultitude d'idées ingénieuses et astucieuses sont et ont été mises au point pour diminuer l'étalement des ondes afin d'augmenter toujours plus les débits.

#### 10.4.5 Résumer de la situation

Pour résumer, quelque soit la dispersion du système, la vitesse de propagation d'une onde plane monochromatique est toujours la vitesse de phase  $v_\varphi = \omega/k$ . Mais aucun signal ne peut se résumer à une seule onde plane monochromatique, il faut donc savoir comment se propage une somme d'OPM, i.e. un paquet d'onde.

Plusieurs cas se présentent :

- Le milieu n'est pas dispersif (il obéit à une équation de d'Alembert). Alors, toutes les composantes sinusoïdales du paquet d'onde se déplace à la même vitesse de phase et le paquet d'onde se déplace lui aussi à la vitesse de phase  $v_g = v_\varphi = c$ . Toute onde se déplace à la vitesse de propagation  $c$  obtenue via l'équation d'onde de d'Alembert.
- Le milieu est dispersif, mais pas tant que ça<sup>19</sup> : on peut se limiter à l'ordre 1 dans le développement limité de la relation de dispersion. Les différentes ondes planes monochromatiques composant le paquet d'onde se déphasent (on parle de glissement de phase) mais l'enveloppe du paquet d'onde se déplace à la vitesse

19. Ou alors, comme dit plus haut, l'onde incidente à un spectre très étroit.

de groupe  $v_g = d\omega/dk(\omega_0)$  sans se déformer.

NB : paradoxalement, quasiment aucune onde ne se déplace alors à la vitesse  $c$  de propagation qui apparait dans l'équation d'onde.

- Le milieu est clairement dispersif<sup>20</sup> et il faut pousser le développement limité à l'ordre 2. Le paquet d'onde se déplace à la vitesse de groupe  $v_g$  mais il se déforme au cours de la propagation.
- Le milieu est très dispersif<sup>21</sup>. Il faut aller encore plus loin dans le développement limité. Le concept de vitesse de groupe n'a plus beaucoup de sens<sup>22</sup>, il faut travailler avec le flux d'énergie de l'onde.

20. Ou alors l'onde à un spectre large

21. Cela est par exemple le cas pour la dispersion anormale des ondes optiques près d'une bande d'absorption.

22. On peut tout à fait avoir des vitesses de groupe plus grandes que la vitesse de la lumière voire des vitesses de groupe négatives

### 10.5 Un exemple : la relation de dispersion de Klein Gordon

Nous avons déjà eu à faire à l'équation d'onde de Klein-Gordon dans le cas de pendules couplés par un ressort. Il s'agit d'une équation que l'on retrouve dans de nombreux systèmes en physique, comme par exemple la propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma. La relation de dispersion associée à cette équation est :

$$\omega(k)^2 = c^2k^2 + \omega_c^2 \tag{10.9}$$

où  $\omega_c$  est une pulsation caractéristique du système. La relation de dispersion peut aussi s'écrire :

$$k(\omega) = \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2}} \tag{10.10}$$

Cette relation de dispersion est tracée sur la figure 10.4.

Nous voyons tout d'abord que si la pulsation est inférieure à  $\omega_c$ , la pulsation de coupure, alors le vecteur d'onde  $k$  est une grandeur purement complexe. Il n'y a alors plus de propagation et uniquement de l'atténuation pour l'onde. On parle alors d'onde évanescente.

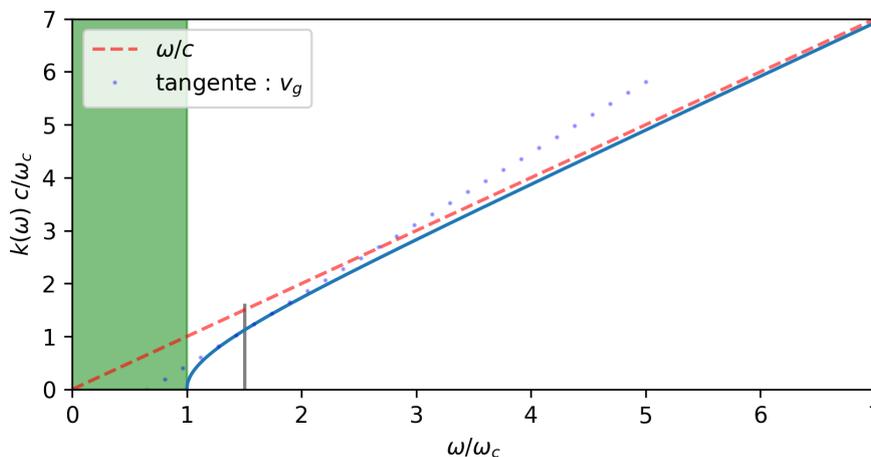


FIGURE 10.4: Relation de Klein-Gordon

$$k(\omega) = \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2}}$$

Nous pouvons calculer la vitesse d'une onde plane monochromatique, c'est à dire la vitesse de phase :

$$v_{\varphi} = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega c}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} > c$$

Étonnamment, on trouve que la vitesse peut être supérieure à la vitesse de propagation figurant dans l'équation d'onde. Cela pourrait poser un problème pour les ondes électromagnétiques où la vitesse de l'onde  $c$  est la vitesse de la lumière  $c_0$ . Une onde plane monochromatique serait-elle alors en train de briser les lois de la relativité? Non, car bien qu'elle puisse en effet se propager plus vite que la vitesse de la lumière, elle ne peut pas transporter d'information comme nous l'avons vu à la section 10.3 p.166.

Nous pouvons ensuite calculer la vitesse de groupe. Pour ce faire on différencie tout d'abord l'équation 10.9 :

$$2\omega d\omega = 2c^2 k dk$$

ce qui nous permet d'obtenir pour la vitesse de groupe :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = c^2 \frac{k}{\omega} = \frac{c^2}{v_{\varphi}} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} < c$$

Le paquet d'onde, qui peut lui transporter de l'information, se déplace bien à une vitesse inférieure à la vitesse de propagation figurant dans l'équation d'onde.

## 10.6 TD 10

## Questions de cours

1. Qu'est-ce qu'un milieu dispersif?
2. Comment se traduit mathématiquement sur le vecteur d'onde  $k$  le fait que le milieu soit absorbant?
3. Pourquoi une onde plane monochromatique est un objet purement mathématique et qu'il est donc impossible de réaliser *stricto sensu* un tel objet dans le monde physique?
4. Qu'est ce qu'un paquet d'onde?
5. Pourquoi un paquet d'onde permet de localiser dans le temps et l'espace une onde?
6. Quelle est l'effet sur un paquet d'onde d'un milieu dont la dispersion est peu prononcée (on se limite à l'ordre 1 dans le développement limité de la relation de dispersion)?
7. Quelle est l'effet sur un paquet d'onde d'un milieu dont la dispersion est marquée (on se limite à l'ordre 2 dans le développement limité de la relation de dispersion)?

## Dérivation plus intuitive de la vitesse de groupe

Le sommet de l'enveloppe d'un paquet d'onde qui se déplace à la vitesse de groupe se situe la position spatio-temporelle où toutes les ondes planes monochromatiques qui forme le paquet d'onde sont en phase.

Soit un paquet d'onde dont le sommet de l'enveloppe se trouve à  $x = 0$  au temps  $t = 0$ .

1. La phase  $\varphi_i$  de l'onde plane  $i$  composant le paquet d'onde s'écrit, en toute généralité :

$$\varphi_i = \omega_i t - k_i x + \phi_i$$

Montrer que pour le paquet d'onde se situant en  $(x, t) = (0, 0)$ , les phases à l'origine  $\phi_i$  sont toutes égales à une constante que l'on notera  $\phi$ .

2. Toutes les phases des  $\varphi_i$  des ondes planes constituant le paquet d'onde sont égales (d'où les interférences constructives) en  $(x, t) = (0, 0)$ . On cherche maintenant, un autre endroit spatio-temporelle  $(x, t)$  où ces interférences constructives peuvent se produire à nouveau. Fixons par exemple, le temps, et cherchons la position  $x$  où les interférences constructives peuvent apparaître. Cela revient à dire que les phases  $\varphi_i$  à la position  $(x, t)$  sont indépendantes du vecteur d'onde  $k$ .

De cette constatation obtenir l'expression de la vitesse  $v_g$  à laquelle se déplace le paquet d'onde.

3. Montrer que si l'on impose au phases  $\varphi_i$  du paquet d'onde d'être indépendante du temps  $t$ , on retrouve la vitesse de phase.

### Relation dispersion de l'équation de Schrödinger

L'équation de Schrodinger pour une particule libre se déplaçant selon une seule dimension est :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

1. Donner la relation de dispersion associée à l'équation de Schrödinger 1D pour une particule libre.
2. Retrouver la même relation dispersion en injectant dans l'expression de l'énergie  $E = p^2/2m$  la relation de Planck et la relation de De Broglie.
3. Le vide est-il un milieu dispersif pour les ondes de probabilités ?
4. Calculer la vitesse de phase d'une onde plane et la vitesse de groupe d'un paquet d'onde pour une onde de probabilité dans le vide.
5. De la vitesse de phase  $v_\varphi$  ou de la vitesse de groupe  $v_g$  laquelle des deux correspond à l'expression classique de la vitesse  $v = p/m$ ? Expliquer pourquoi une onde plane ne peut pas décrire une particule partiellement localisée dans le temps et l'espace.

### Accordage d'un piano

Lorsque l'on prend en compte le fait qu'une corde n'est pas inextensible, ou dit autrement qu'elle se comporte aussi comme un élastique avec une force de rappel horizontale lorsqu'on lui applique une tension  $T_0$ , l'équation d'onde devient :

$$\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = c^2 \left[ \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial^4 a}{\partial x^4} \right]$$

où  $\alpha$  dépend de différent paramètre de la corde (sa surface, le module de Young, etc).

1. Donner la relation de dispersion associée à cette équation d'onde. Le milieu est-il dispersif ?
2. Calculer la vitesse de phase  $v_\varphi$  et la vitesse de groupe  $v_g$ .
3. Nous considérons le cas d'une onde contrainte à se propager le long d'une corde fixée à ses deux extrémités en  $x = 0$  et  $x = L$ . En considérant l'onde plane associée à la vitesse verticale  $v_y(x, t) = V_0 e^{i(\omega t - kx)}$ ,
  - (a) Appliquer la condition aux limite en  $x = 0$  pour montrer qu'un système d'onde stationnaire apparait sur la corde
  - (b) Appliquer la condition aux limites en  $x = L$  pour trouver les valeurs discrettes  $k_n$  que peut prendre le nombre d'onde. NB : la relation de dispersion n'est pas celle liée à l'équation de d'Alembert, et par conséquent les resulats difèrent de ceux établies au chapitre 9.

4. Calculer le rapport des fréquences entre le fondamentale et la seconde harmonique. Montrer que ce rapport n'est plus égale à 2 comme dans le cas de la corde inextensible.
5. Un facteur de piano (c'est à dire la personne en charge de l'accordage), n'accorde pas cet instrument en utilisant un accordeur électronique comme on le fait par exemple avec une guitare. Pour accorder l'instrument, il joue deux notes à l'octave et accorde la deuxième note afin de ne pas entendre de battement entre les deux notes
  - (a) Au vu de la question précédente expliquer la démarche empirique du facteur de piano.

## 10.7 CQFR

*Connaissances*

1. Lorsqu'un milieu est absorbant il apparait une atténuation de l'onde mais aussi un phénomène de dispersion où la vitesse (de phase) d'une onde plane monochromatique dépend de sa pulsation  $\omega$ .
2. Mathématiquement, l'absorption de l'onde se traduit par le fait que le vecteur d'onde  $k$  a une partie imaginaire.
3. Mathématiquement, la dispersion de l'onde se traduit par le fait que la partie réelle du vecteur d'onde  $k_1(\omega)$  dépend de la pulsation.
4. Une onde plane monochromatique, pris dans son sens le plus strict, n'a pas de réalité physique car elle peut être à la fois partout et nul part dans l'espace et le temps. Il existe néanmoins des situations expérimentales où on peut produire des ondes que l'on peut considérer comme planes et monochromatiques avec une très bonne approximation.
5. Afin de localiser une onde dans l'espace et le temps, il faut la créer via une somme d'onde planes monochromatiques que l'on appelle *paquet d'onde*.
6. Un paquet d'onde est localisé dans le temps et l'espace car au delà de son enveloppe les ondes planes monochromatiques qui le composent n'ont plus aucune corrélation entre leur phases respectives ce qui conduit à des interférences destructives.
7. Effectuer un développement limité de la relation de dispersion est une méthode astucieuse pour pouvoir évaluer l'impact de la dispersion sur un paquet d'onde. En effet, selon le niveau de détail souhaité, on arrête le développement limité à l'ordre correspondant.
8. Lorsque l'on peut se limiter à l'ordre 1 dans le développement limité de la relation de dispersion, le paquet d'onde se déplace à la vitesse de groupe  $v_g = d\omega/dk$  sans se déformer.
9. A l'ordre 2, le paquet d'onde se déplace toujours à la vitesse de groupe mais il s'étale au cours de la propagation.
10. La vitesse de phase d'une onde plane monochromatique peut dépasser la vitesse de la lumière, mais cela ne pose pas de problème avec la théorie de la relativité car une onde plane monochromatique ne peut pas propager d'information.

## 11 Ondes guidées



# Bibliographie

- R.P. Feynman, R.B. Leighton, and M.L. Sands. *Le cours de physique de Feynman : Mécanique*. Number vol. 2 in Hors Collection. Dunod, 2014. ISBN 9782100597444.
- P. Brasselet. *Mécanique MPSI/PCSI : 1re année : cours et exercices*. Collection Prépa Physique Chimie. Presses Universitaires de France - PUF, 2000. ISBN 9782130509578.
- J.M Brébec. *Ondes : 2de année PC, PSI*. H-prépa. Hachette, 1997. ISBN 978-2011451446.
- L. Bocquet, J. Renault, and J.P. Faroux. *Toute la Thermodynamique, la mécanique des fluides et les ondes mécaniques*. Dunod, 2002. ISBN 978-2100055685.
- Walter Lewin. Mit ocw 8.03 - physics iii - vibrations and waves. 2004. URL <http://ocw.mit.edu/>.
- D Morin. *Waves*. Harvard University Physics Department, 2014. URL <http://www.people.fas.harvard.edu/~djmorin/book.html>.
- F.S. Crawford. *Waves : Berkeley Physics Course*. Number vol. 3. McGraw-Hill, 1965.
- Thibierge E. *Propagation des ondes*. Ecole Normale Supérieure de Lyon, 2015. URL [http://www.etienne-thibierge.fr/agreg/ondes\\_poly\\_2015.pdf](http://www.etienne-thibierge.fr/agreg/ondes_poly_2015.pdf).
- H Georgi. *The Physics of Waves*. Harvard University Physics Department, 2015. URL [https://ocw.mit.edu/courses/physics/8-03sc-physics-iii-vibrations-and-waves-fall-2016/syllabus/MIT8\\_03SCF16\\_Textbook.pdf](https://ocw.mit.edu/courses/physics/8-03sc-physics-iii-vibrations-and-waves-fall-2016/syllabus/MIT8_03SCF16_Textbook.pdf).



# A Élément de correction des TD

## TD 1

### Système masse ressort avec la gravité

1. (a) Appliquons le PDF au système :

$$ma = \sum F \quad (\text{A.1})$$

où  $a$  est l'accélération est  $\sum F$  la somme des forces qui vaut ici :

$$\sum F = F_{\text{Hooke}} + P = -k(z(t) - l_0)e_z + mge_z$$

où  $F_{\text{Hooke}}$  et la force de Hooke<sup>1</sup> et  $P$  le poids<sup>2</sup>.

En projetant<sup>3</sup> sur l'axe  $z$  :

$$m\ddot{z} = -k(z(t) - l_0) + mg \quad (\text{A.2})$$

A l'équilibre, l'abscisse de la masse  $m$  vaut  $z = l_{\text{eq}}$  la vitesse et l'accélération sont nulles d'où  $\dot{z} = 0$  et<sup>4</sup> :

$$-k(l_{\text{eq}} - l_0) + mg = 0$$

et donc :

$$l_{\text{eq}} = l_0 + \frac{mg}{k} \quad (\text{A.3})$$

(b) On accroche une masse de valeur  $m$  connue. La constante de raideur  $k$  vaut alors :

$$k = \frac{mg}{l_{\text{eq}} - l_0}$$

2. (a) De façon générale nous pouvons écrire  $z(t) = l_{\text{eq}} + \Delta z$ , ce qui donne dans l'équation A.2 :

$$m\ddot{z} = -k(l_{\text{eq}} + \Delta z - l_0) + mg$$

(b) En injectant l'expression A.3 portant sur  $l_{\text{eq}}$  obtenue à l'équilibre, nous obtenons :

$$m\ddot{z} = -k(l_0' + \frac{mg}{k} + \Delta z - l_0') + mg$$

ce qui donne :

$$m\ddot{z} = -k\Delta z$$

Or nous pouvons calculer les dérivées temporelles de  $z(t) = l_{\text{eq}} + \Delta z$  et voir que  $\dot{z}(t) = \dot{\Delta z}$  car  $l_{\text{eq}}$  est une constante qui ne dépend pas du temps. et nous obtenons :

$$m\ddot{\Delta z} = -k\Delta z$$

La force du poids n'intervient plus dans cette expression et son seul effet a été de décaler l'abscisse à laquelle les oscillations ont lieu.

(c) En posant  $\omega_0^2 = k/m$  nous obtenons l'équation différentielle harmonique :

$$\ddot{\Delta z} + \omega_0^2 \Delta z = 0$$

3. Via l'équation différentielle nous savons que  $\Delta z(t)$  se met sous la forme :

$$\Delta z(t) = Z_0 \cos(\omega_0 t + \phi)$$

et par conséquent la vitesse :

$$v(t) = \dot{\Delta z}(t) = -\omega_0 Z_0 \sin(\omega_0 t + \phi)$$

Or les conditions initiales sont que à  $t = 0$ , la vitesse est nulle d'où

$$-\omega_0 Z_0 \sin(\phi) = 0$$

1. Voir l'encart 1 pour le signe moins

2. Le poids est dirigé vers le bas, or, l'axe  $z$  est lui aussi ici dirigé vers le bas d'où le signe + dans  $P = +mge_z$

3. C'est à dire mathématiquement en multipliant scalairement de par et d'autre l'équation A.1 par le vecteur  $e_z$

4. On peut aussi voir qu'à l'équilibre le poids compense la force du ressort

d'où puisque ni  $Z_0$  ni  $\omega_0$  ne peuvent être nulle (ce qui voudrait dire qu'il n'y a pas de mouvement) nous avons  $\sin \phi = 0$  et donc  $\phi = 0$ .

Nous savons aussi que à  $t = 0$   $z = z_0$  et donc :

$$\Delta z(t) = Z_0 \cos(0) = z_0 \Rightarrow Z_0 = z_0$$

Au total :

$$\Delta z(t) = z_0 \cos(\omega t) \quad v(t) = -z_0 \omega_0 \sin(\omega t) \quad a(t) = -z_0 \omega_0^2 \cos(\omega t)$$

### Écriture Amplitude-Phase

- Développer dans l'écriture Amplitude-Phase les termes en cosinus via  $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- Identifier les termes en sinus et cosinus avec l'autre expression.

### Association de ressort

Le cas en parallèle est direct, le ressort équivalent a pour constante de raideur équivalente

$$k_{\text{eqParallele}} = k_1 + k_2$$

Le cas en série nécessite un peu plus d'attention. Soit  $A$  le point entre les deux ressorts.

- Ce point est à l'équilibre et donc  $k_1 x_1 = k_2 x_2$ , (où les noms des variables sont explicites).
- Considérons ensuite le point de contact entre la masse  $m$  et le deuxième ressort  $k_2$ , à l'équilibre  $mg = k_2 x_2$ ,
- Ce que l'on peut comparer à un seul ressort de constante de raideur équivalente  $k_{eq}$  qui s'allongerait de  $x_1 + x_2$  et donc  $mg = k_{eq}(x_1 + x_2)$ .
- De ces 3 équations on tire que :

$$\frac{1}{k_{\text{eqSerie}}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

5. On peut aussi utiliser la conservation de l'énergie. L'énergie cinétique vaut  $E_c = 1/2 J \dot{\theta}^2$  et l'énergie potentielle stockée dans le ressort central  $E_p = 1/2 C \theta^2$ . La constance de l'énergie mécanique s'écrit :  $dE_m/dt = 0$  ce qui donne  $1/2 J 2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + 1/2 C 2 \theta \dot{\theta} = 0$  d'où l'équation différentielle :  $\ddot{\theta} + C/J \theta = 0$

### Le pendule de Pohl

1. Le moment cinétique du pendule par rapport à l'axe de rotation du pendule est  $L_\Delta = J \dot{\theta} e_z$ , l'application du théorème du moment cinétique donne<sup>5</sup> :

$$\frac{dL_\Delta}{dt} = C \theta \Leftrightarrow J \ddot{\theta} + C \theta = 0$$

et donc :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{C}{J}$$

2. voir encart 2 p.9
- 3.

$$\theta(t) = \Theta_0 \cos \omega_0 t + \varphi$$

4. A  $t = 0$ , le pendule à une vitesse nulle, ce qui se traduit mathématiquement par :

$$\dot{\theta}(t = 0) = -\Theta_0 \omega_0 \sin(\varphi) = 0$$

d'où puisque ni  $\Theta_0$  ni  $\omega_0$  ne peuvent être nulle (ce qui voudrait dire qu'il n'y a pas de mouvement) nous avons  $\sin \phi = 0$  et donc  $\phi = 0$

Toujours à  $t = 0$  le pendule a pour angle  $\theta_0$ , ce qui se traduit mathématiquement par :

$$\theta(t = 0) = \Theta_0 = \theta_0$$

D'où l'équation du mouvement :

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)$$

*Retour sur le pendule simple*

1. — Voir Cours p ??.
- L'accélération selon  $\mathbf{u}$  vaut  $-l\ddot{\theta}$ , la projection du poids  $u_\theta$  vaut  $-mg \sin \theta$ , la tension  $T$  du fil n'a pas de composante selon  $u_\theta$ . Le PFD projeté sur  $u_\theta$  donne l'équation différentielle. NB : selon  $\mathbf{u}_r$ , on obtient l'expression de la tension du fil.
- Le moment cinétique vaut  $L = \mathbf{OM} \wedge m\mathbf{v} = -ml\dot{\theta}^2\mathbf{u}_z$ . Le moment de la tension  $T$  du fil est nul, celui du poids vaut  $-mgsin\theta\mathbf{u}_z$ . La dérivée du moment cinétique par rapport au temps est égale à la somme du moment des forces ce qui donne l'équation différentielle.
2. Voir figure 1.6.

*Pendule sphérique*

1. — La tension de la corde s'écrit  $T = T \frac{\mathbf{MC}}{l}$  que l'on peut réécrire  $T = T \frac{\mathbf{MO} + \mathbf{OC}}{l}$  avec  $\mathbf{MO} = -xe_x - ye_y$  et  $\mathbf{OC} = ze_z$ . Donc  $T = -\frac{T}{l}xe - \frac{T}{l}ye_y + T_z e_z$
- Le PFD projeté sur l'axe z donne :  $m\ddot{z} \approx 0 = -mg + T$  d'où  $mg = T$ .
- Selon l'axe x, on obtient  $m\ddot{x} = T_x = -xT = -m\frac{g}{l}x$ , d'où l'équation différentielle  $m\ddot{x} + \frac{g}{l}x = 0$ . Idem pour y.

*Fréquence propre d'oscillation d'une molécule diatomique*

1. Le terme répulsif ( $C/r^n$ ) traduit l'impossibilité de rapprocher trop près les deux molécules. On peut le voir comme la répulsion des nuages électroniques des deux atomes ou d'un point vue plus quantique comme l'expression du principe d'exclusion de Pauli. Le terme attractif traduit l'interaction covalente entre les deux atomes. Il s'agit d'une approximation de ce que l'on appelle la liaison chimique et qui a pour conséquence d'abaisser l'énergie potentielle d'interaction.

2. — 
$$\frac{dE_p}{dr}(r_0) = 0 \Rightarrow \frac{nC}{r_0^{n+1}} = \alpha \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} \tag{A.4}$$

$$k = \frac{d^2E_p}{dr^2}(r_0) = \frac{n(n+1)C}{r_0^{n+2}} - \alpha \frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0^3} \tag{A.5}$$

— En multipliant l'équation A.4 par  $1/r_0$  et en l'injectant dans l'équation A.5, on obtient :

$$k = n(n-1) \frac{C}{r_0^{n+2}}$$

—  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$

$$E_d = -Ep(r_0) = -\left(\frac{C}{r_0^n} - \alpha \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0}\right) \tag{A.6}$$

or d'après l'équation A.4 divisée par  $1/r_0$  nous avons :

$$\frac{nC}{r_0^n} = \alpha \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0}$$

ce qui nous permet le deuxième terme de l'équation A.6 et on obtient :

$$E_d = -\frac{C}{r_0^n} + \frac{nC}{r_0^n} = (n-1) \frac{C}{r_0^n} = k \frac{r_0^2}{n}$$

3.  $k = 493 \text{ N m}^{-1}$ ,  $n = 12$ ,  $C = 1.06 \times 10^{-138} \text{ J m}^{12}$ ,  $\alpha = 0.4$

*Résonateur d'Helmholtz*

1.  $\delta V = sx$

2.  $\delta P = -\frac{1}{V} \frac{\delta V}{\chi_s} = -\frac{1}{V} \frac{s x}{\chi_s}$
3.  $m\ddot{x} = \delta P_s = -\frac{1}{V} \frac{s^2 x}{\chi_s}$ . D'où l'équation différentielle :  $\ddot{x} + \frac{1}{mV} \frac{s^2 x}{\chi_s} = 0$ . La constante de raideur du ressort équivalent est donc :  $k = \frac{1}{V} \frac{s^2}{\chi_s}$
4. La pulsation propre  $\omega_0$  est donnée par  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1}{V} \frac{s^2}{m\chi_s}} = c\sqrt{\frac{s}{Vl}}$

### Atome de Thomson

1. Si l'atome s'éloigne du centre, il y a une dissymétrie au niveau des charges ce qui crée un champ électrique qui le ramène au centre de la sphère.
2. Par symétrie, le champ électrique est radial et par invariance il ne dépend que de  $r$ . Par conséquent, on choisit une surface de Gauss avec les mêmes symétries : une sphère de rayon  $r$ . Le flux du champ  $E(r)$  à travers cette surface vaut  $4\pi r^2 E(r)$ , les charges contenues dans le volume de la sphère valent :  $Q_{int} = \frac{r^3}{a^3} Q$ . L'application du théorème de Gauss donne donc  $4\pi r^2 E(r) = \frac{r^3}{a^3} \frac{Q}{\epsilon_0}$  et le champ électrique vaut donc  $E(r) = \frac{r}{a^3} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} e_r$
3.  $V(r) = \frac{1}{2} \frac{a^3 Q}{\pi\epsilon_0} r^2$
4.  $E_p = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{a^3} r^2$
5.  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{a^3}$
6.  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{ma^3}}$
7.  $a_{Thomson} \approx 10pm$ , ce qui est un peu petit si on le compare au rayon de l'atome de Bohr  $a_0 = 52.9pm$

### Oscillations transverses d'un système masse ressort

1.  $F = -k(l - l_r) \sin\theta e_y + -k(l - l_r) \cos\theta e_x$
2. Le PFD selon  $y$  (avec les deux ressorts) donne :  $m\ddot{y} = -2k(l - l_r) \sin\theta e_y$ , de plus  $\sin\theta = \frac{y}{l}$ , donc  $m\ddot{y} + 2ky(1 - \frac{l_r}{l}) = 0$
3. On néglige  $\frac{l_r}{l}$  devant 1 et on retombe sur l'équation différentielle du mouvement harmonique avec comme pulsation  $\omega_{slinky} = \sqrt{\frac{2k}{m}}$
4. Via Pythagore :  $l^2 = y^2 + l_0^2$  d'où  $\frac{1}{l} = (y^2 + l_0^2)^{-1/2} = l_0^{-1} \left(1 + \frac{y^2}{l_0^2}\right)^{-1/2} \approx \frac{1}{l_0} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{y^2}{l_0^2}\right)$ . Si on reporte ce DL dans l'équation différentielle,  $m\ddot{y} + 2ky\left(1 - \frac{l_r}{l_0} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{y^2}{l_0^2}\right)\right) = 0$  et  $m\ddot{y} + 2ky\left(1 - \frac{l_r}{l_0}\right) + 2k\frac{y^3}{l_0^2} = 0$ . On néglige le terme d'ordre 3 en  $y$ , pour obtenir l'équation différentielle linéaire :  $m\ddot{y} + ky\left(1 - \frac{l_r}{l_0}\right) = 0$  correspondant à un mouvement harmonique de pulsation propre  $\omega_{small} = \sqrt{\frac{2k\left(1 - \frac{l_r}{l_0}\right)}{m}}$

### TD 2 - Éléments de correction

#### Retour sur le résonateur de Helmholtz

1. On compte environ 15 oscillations avant extinction donc  $Q \approx 15$

2. La période des pseudo oscillations vaut environ 10ms. Comme le facteur de qualité est grand  $Q > 5$ , on l'assimile à la fréquence propre  $T_0$  de l'oscillateur. Ce qui donne une fréquence propre de 100Hz et une pulsation propre de  $628 \text{ rad s}^{-1}$ . La bande passante est alors donnée par  $\omega_0/Q = 6 \text{ Hz}$

### Résonance en vitesse

1. On repart de l'expression de la position complexe  $\underline{X}$  (cf eq 2.7), et on écrit que la vitesse est la dérivée temporelle de la position :  $\underline{V} = i\omega\underline{X}$ , donc

$$\underline{V} = \frac{i\omega F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{\omega}{\tau}}$$

2. Pour l'amplitude, il faut étudier le module de  $\underline{V}$  :

$$|\underline{V}| = \frac{\omega F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}}} = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega)^2 + \frac{1}{\tau^2}}} = \frac{\omega_0 F_0/k}{\sqrt{(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})^2 + \frac{1}{Q^2}}}$$

qui passe par un maximum lorsque le dénominateur est minimum pour  $\omega = \omega_0$ .

L'amplitude vaut alors  $Q \frac{\omega_0 F_0}{k}$ .

Aux basses fréquences  $\omega \rightarrow 0$  :

$$\underline{V} \approx i \frac{\omega F_0}{k} \Rightarrow |\underline{V}| \approx 0 \quad \text{et} \quad \Phi_v \approx \frac{\pi}{2}$$

Aux hautes fréquences  $\omega \rightarrow \infty$  :

$$\underline{V} \approx -i \frac{\omega_0 \omega F_0}{k} \Rightarrow |\underline{V}| \approx 0 \quad \text{et} \quad \Phi_v \approx -\frac{\pi}{2}$$

A la résonance  $\omega = \omega_0$  :

$$\underline{V} = Q \frac{\omega_0 F_0}{k} \Rightarrow |\underline{V}| = Q \frac{\omega_0 F_0}{k} \quad \text{et} \quad \Phi_v = 0$$

3. Cherchons les pulsations  $\omega_{BPg}$  et  $\omega_{BPd}$  pour lesquelles l'intensité de la vitesse est divisée par  $\sqrt{2}$ , par rapport à la résonance. Ce sont les pulsations pour lesquelles le dénominateur de  $|\underline{V}|$  vaut  $\frac{Q}{\sqrt{2}}$  :

$$\sqrt{(Q^2 \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})^2 + 1} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \pm \frac{1}{Q}$$

4. Il s'agit donc du comportement d'un filtre *passé-bande*.

### Amortisseur de voiture

#### Conception de l'amortisseur

Choix de la constante de raideur A l'équilibre la force de Hooke exercée par le ressort compense le poids supplémentaire due au chargement.

$$k\Delta x = m_{\text{sup}}g \Rightarrow k = \frac{m_{\text{sup}}g}{\Delta x} = \frac{500 \times 10}{10 \times 10^{-2}} = 5 \times 10^4 \text{ N m}^{-1}$$

Choix du facteur d'amortissement —  $Q = 1/2$  est la limite entre le régime aperiodique et le régime pseudo-periodique. Il y a amortissement sans pour autant avoir beaucoup d'oscillation avant d'atteindre à nouveau l'équilibre.

- Par définition  $Q = \omega_0 \tau$  où  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  et  $\tau = m/\alpha$  soit  $Q = (1/\alpha)\sqrt{km}$ . Ici  $\omega_0 = \sqrt{5 \times 10^4 / 325} = 12.4 \text{ rad s}^{-1}$ . On obtient alors :

$$\alpha = \frac{m\omega_0}{Q} = 325 \times 12.4 \times 2 = 8060 \text{ kg s}^{-1}$$

- NB : C'est assez contre intuitif.

Lorsque la voiture roule à vide la masse  $m$  diminue, ce qui diminue le facteur de qualité ( $Q = (1/\alpha)\sqrt{km}$ ). On passe donc en régime on aperiodique et l'amortissement va être moins souple.

Si la voiture roule plus chargée, le facteur de qualité  $Q$  augmente, on passe donc en régime pseudo-periodique et la voiture va faire plus d'oscillation après un dos d'âne.

Oscillations forcée sur une route ondulée

1. On part de la force de frottement :

$$f_r = -\alpha(\dot{z}_M(t) - \dot{z}_O(t))e_z$$

L'altitude du point  $O$  dépend de la position  $x$  du profil de la route. Or, la voiture étant en mouvement à la vitesse  $v$ , on a  $x = vt$  et donc :

$$z_O(t) = a \cos\left(2\pi\frac{vt}{\lambda}\right) = a \cos(\omega t) \Rightarrow \dot{z}_O(t) = -a\omega \sin(\omega t)$$

ce qui donne donc dans l'expression précédente :

$$f_r = -\alpha\dot{z}(t)e_z - \alpha a\omega \sin(\omega t)e_z$$

2.

$$F_k = -k(z_M(t) - z_O(t))e_z = -k(z - a \cos(\omega t))e_z$$

3. PFD à la masse projeté selon l'axe  $z$  :

$$m\ddot{z} = -\alpha\dot{z} - \alpha a\omega \sin \omega t - k(z - a \cos(\omega t))$$

soit aussi :

$$\ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = -\frac{\alpha}{m}a\omega \sin \omega t + \frac{k}{m}a \cos(\omega t)$$

4. La route impose une pulsation  $\omega$  à la voiture qui est un système linéaire et qui va donc osciller à  $\omega$ , on cherche la solution de l'équation différentielle sous une forme harmonique en écriture complexe  $\underline{z} = \underline{Z}e^{i\omega t}$  :

$$-m\omega^2 \underline{Z} = -i\alpha\omega \underline{Z} + \alpha i a\omega - k\underline{Z} + ak$$

et

$$\underline{Z} = \frac{ak + \alpha i a\omega}{-m\omega^2 + i\alpha\omega + k}$$

ce qui donne pour son module qui est égale à l'amplitude des oscillations :

$$|\underline{Z}| = a \sqrt{\frac{k^2 + (\alpha\omega)^2}{(-m\omega^2 + k)^2 + (\alpha\omega)^2}}$$

5. Il faut trouver la valeur de  $\omega$ , pour laquelle le dénominateur est minimum, c'est à dire que sa dérivée est nulle :

$$\frac{d((-m\omega^2 + k)^2 + (\alpha\omega)^2)}{d\omega} = 2(k - m\omega^2)(-2m\omega) + 2\alpha^2\omega$$

qui s'annule pour :

$$2(k - m\omega^2)(-2m\omega) + 2\alpha^2\omega = 0 \Leftrightarrow 2(k - m\omega^2)(-m) + \alpha^2 = 0 \Leftrightarrow -m\omega^2 = k - \frac{\alpha^2}{2m}$$

et donc :

$$\omega_r = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\alpha^2}{2m^2}}$$

6. et même extrêmement extrêmement linéaire, en effet, le champ électrique du soleil est de l'ordre de  $600 \text{ V m}^{-1}$ . Le champ électrique au sein d'un atome entre un proton et un électron est de l'ordre de  $\frac{e}{4\epsilon_0\pi a_0^2} \approx$

$1 \times 10^{11} \text{ V m}^{-1}$  avec  $a_0$  le rayon de Bohr soit  $52.9 \text{ pm}$ . Le champ électrique est donc ridiculement petit par rapport à celui créé par le noyau de l'atome. L'électron est à peine perturbé et le système est extrêmement linéaire.

Par contre, si on utilise de la lumière laser, focalisée et pulsée, on peut atteindre des champs électriques comparables à celui du noyau. Le comportement du système devient alors non linéaire. De nouveaux effets peuvent apparaître comme le fait par exemple que de la lumière incidente rouge devienne de la lumière bleue en sortie. C'est le domaine de l'Optique Non Linéaire (ONL).

Modèle de l'électron élastiquement lié

1. La mise en équation est extrêmement proche de celle du système masse-ressort. A vrai dire, seul le contexte change. Selon l'axe  $x$ , le PFD donne :

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = -eE \cos \omega t \tag{A.7}$$

qui peut se mettre ensuite sous la forme canonique (cf 2.6) avec  $\tau = \lambda/m$ . Du fait que la réponse est linéaire<sup>6</sup>, on cherche donc une solution harmonique à la même pulsation que le champ électrique, soit  $x = x_0 \cos(\omega t + \phi)$ .

Reste à déterminer  $x_0$  et  $\phi$  (qui sont tous les deux fonction de  $\omega$ ). Pour simplifier, on forme un seul nombre complexe à partir des deux nombres réels  $x_0$  et  $\phi$ . Plus précisément, on cherche la solution sous la forme  $\underline{x} = \underline{X}e^{i\omega t}$ . Ainsi,  $x_0$  est le module de  $\underline{X}$  et  $\phi$  est l'argument de  $\underline{X}$ . De plus, et c'est l'atout principal de cette écriture, la dérivée temporelle devient une opération extrêmement simple : on multiplie par  $i\omega$ .

L'équation A.7 devient<sup>7</sup> après simplification par  $e^{i\omega t}$  :

$$-\omega^2 \underline{X} + i \frac{\omega}{\tau} \underline{X} + \omega_0^2 \underline{X} = -\frac{eE_0}{m}$$

Et en mettant  $\underline{X}$  en facteur :

$$\underline{X} = \frac{-eE_0/m}{-\omega^2 + \omega_0^2 + i \frac{\omega}{\tau}}$$

2. L'accélération  $\underline{A}$  est la dérivée seconde par rapport au temps de la position  $\underline{X}$ , cela reste vrai en écriture complexe et en plus c'est bien plus facile à calculer :

$$\underline{A} = -\omega^2 \underline{X}$$

3. — La diffusion a lieu à la même pulsation que l'excitateur c'est à dire  $\omega$  car le système est (très) linéaire.  
 — L'énoncé guide vers plusieurs simplifications :

$$\underline{A} \approx -\omega^2 \frac{-eE_0/m}{\omega_0^2}$$

et

$$P = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left( \frac{-eE_0/m}{\omega_0^2} \right)^2 \omega^4$$

- La diffusion est en  $\omega^4$  c'est à dire<sup>8</sup> en  $\frac{1}{\lambda^4}$ . Une lumière rouge à  $\lambda_r = 800$  nm est  $2^4 = 16$  fois moins diffusée qu'une lumière bleue à  $\lambda_b = 400$  nm. Le bleu dans le spectre solaire est  $\approx 16$  fois plus diffusé que le rouge par les molécules présentes dans l'atmosphère. Au bilan, le ciel apparaît bleu.

Si on résume, la couleur bleue du ciel est due au fait que :

- (a) Le champ électrique rayonné par une charge est proportionnel à l'accélération de la charge.
- (b) Le système étant linéaire, l'électron oscille avec la même fréquence que le champ électrique solaire
- (c) Comme la longueur d'onde bleue est plus courte que la longueur d'onde rouge, l'électron accélère plus lorsqu'il est soumis à une longueur d'onde courte qu'une longueur d'onde longue. Plus précisément, la dépendance en  $\omega^2$  (cf  $\underline{A} = -\omega^2 \underline{X}$ )
- (d) Enfin l'intensité rayonnée (où la puissance) est proportionnelle au carré du champ électrique la dépendance précédente passe de  $\omega^2$  à  $\omega^4$ . Au final, l'intensité rayonnée est bien en  $\omega^4$ .

8. (le classique "en 1 sur lambda 4")

### TD 3

#### Pendules symétriques couplés par un ressort

1. Par définition

$$\underline{L}_{O1} = \underline{O1M} \wedge m \underline{v}$$

Ce qui donne en coordonnées polaires :

$$\underline{L}_{O1} = \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge m \begin{pmatrix} 0 \\ l\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ml\dot{\theta} \end{pmatrix} = ml^2 \dot{\theta} \underline{e}_z$$

2. Voir schéma :

$$\underline{M}_{O1}(P) = \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge mg \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \\ -\sin \theta_1 \\ 0 \end{pmatrix} = -mgl \sin \theta_1 \underline{e}_z$$

$$\underline{M}_{O1}(T) = \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} T \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{0}$$

Ce qui est normal car la force de tension est radiale et ne peut donc pas provoquer de rotation autour de l'axe  $\underline{e}_z$

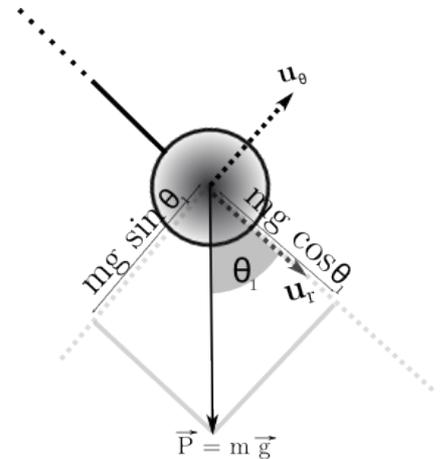


FIGURE A.1: Calcul du moment du poids  $P$

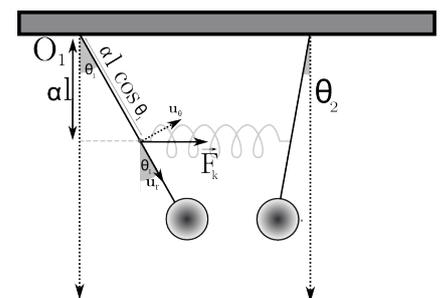


FIGURE A.2: Calcul du moment de la force de couplage  $F_k$

— Soit  $F_k$  la norme de la force de Hooke que nous déterminerons juste après. Le point d'application de la force est maintenant la masse  $m_1$  mais le point d'accroche du ressort qui se trouve à la distance  $\alpha l / \cos \theta_1$  de l'axe de rotation  $O_1$ . D'où le moment de la force (cf figure A.2) :

$$M_{O_1}(F_k) = \begin{pmatrix} \alpha l / \cos \theta_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge F_k \begin{pmatrix} \sin \theta_1 \\ \cos \theta_1 \\ 0 \end{pmatrix} = F_k e_z$$

Quant à  $F_k$ , on se retrouve dans une situation équivalente à celle du ressort de couplage dans le système masse-ressort. Si on déplace le pendule 2 vers la droite en bloquant le pendule 1, lorsque l'on libère le pendule 1 celui-ci se déplace vers la droite c'est à dire dans le même sens que le déplacement de  $\theta_2$  d'où un signe plus pour  $\theta_2$ .

A contrario, si on déplace le pendule 1 vers la droite en bloquant le pendule 2, lorsque l'on libère le pendule 2, le pendule 1 se déplace vers la gauche c'est à dire dans le sens *inverse* du déplacement de  $\theta_1$  d'où un signe plus pour  $\theta_1$ .

En utilisant temporairement  $x_1$  et  $x_2$ , la position horizontale de la masse 1 et 2 respectivement :

$$F_k = K(x_2 - x_1) = K(l \sin \theta_2 - l \sin \theta_1)$$

Au total, le moment de la force du ressort de couplage par rapport à  $O_1$  vaut :

$$M_{O_1}(F_k) = \alpha l K (l \sin \theta_2 - l \sin \theta_1) e_z$$

3. Au total le TMC :

$$\frac{dL_{O_1}}{dt} = M_{O_1}(P) + M_{O_1}(F_k)$$

le long de l'axe  $z$  donne :

$$ml^2 \ddot{\theta}_1 = -mgl \sin \theta_1 + \alpha Kl^2 (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)$$

et de même pour la masse  $m_2$ , le TMC donne :

$$ml^2 \ddot{\theta}_2 = -mgl \sin \theta_2 + \alpha Kl^2 (\sin \theta_1 - \sin \theta_2)$$

4. Dans le cas des petits angles le système d'équations couplées devient :

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_1 + \Omega \theta_1 + \omega_0 (\theta_2 - \theta_1) &= 0 \\ \ddot{\theta}_2 + \Omega \theta_2 + \omega_0 (\theta_1 - \theta_2) &= 0 \end{aligned}$$

où on a posé  $\Omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$  et  $\omega_0 = \sqrt{\frac{\alpha K}{m}}$

5. On exploite la symétrie en formant les quantités  $u = \theta_1 + \theta_2$  et  $v = \theta_1 - \theta_2$ . En sommant et soustrayant les équations précédentes, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \ddot{u} + \Omega u + \omega_0 u &= 0 \\ \ddot{v} + \Omega v + 2\omega_0 v &= 0 \end{aligned}$$

dont les solutions sont celles d'un oscillateur harmonique :

$$\begin{aligned} u &= a_l \cos(\omega_l t + \Phi_l) \\ v &= b_r \cos(\omega_r t + \Phi_r) \end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned} \omega_s^2 &= \Omega + \omega_0 = \frac{g}{l} + \alpha \frac{K}{m} \\ \omega_a^2 &= \Omega + 2\omega_0 = \frac{g}{l} + 2\alpha \frac{K}{m} \end{aligned}$$

Les solutions sont de la forme :

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= \frac{u+v}{2} = A_l \cos(\omega_l t + \Phi_l) + B_r \cos(\omega_r t + \Phi_r) \\ \theta_2(t) &= \frac{u-v}{2} = A_l \cos(\omega_l t + \Phi_l) - B_r \cos(\omega_r t + \Phi_r) \end{aligned}$$

6. Nous devons donc trouver  $A_l$ ,  $B_r$ ,  $\Phi_l$  et  $\Phi_r$  à partir des conditions initiales.

$$\begin{aligned} \theta_1(t=0) &= A_l \cos(\Phi_l) + B_r \cos(\Phi_r) = \theta_0 \\ \theta_2(t=0) &= A_l \cos(\Phi_l) - B_r \cos(\Phi_r) = 0 \end{aligned}$$

Donc, en sommant les deux équations :

$$2A_l \cos(\Phi_l) = \theta_0$$

et en les soustrayant :

$$2B_r \cos(\Phi_l) = \theta_0$$

et pour les vitesses :

$$\dot{\theta}_1(t=0) = -\omega_l A_l \sin(\Phi_l) - \omega_r B_r \sin(\Phi_r) = 0$$

$$\dot{\theta}_2(t=0) = -\omega_l A_l \sin(\Phi_l) + \omega_r B_r \sin(\Phi_r) = 0$$

Donc, en sommant les deux équations :

$$-2\omega_l A_l \sin(\Phi_l) = 0$$

et en les soustrayant :

$$-2\omega_r B_r \sin(\Phi_r) = 0$$

D'où on en déduit :

$$\Phi_l = \Phi_r = 0$$

Ce qui donne donc pour  $A_l$  et  $B_r$  :

$$A_l = B_r = \frac{\theta_0}{2}$$

et au total :

$$\theta_1(t) = \frac{\theta_0}{2} \cos(\omega_l t) + \frac{\theta_0}{2} \cos(\omega_r t)$$

$$\theta_2(t) = \frac{\theta_0}{2} \cos(\omega_l t) - \frac{\theta_0}{2} \cos(\omega_r t)$$

### Le double pendule

Soit le double pendule schématisé sur la figure 3.12.

Ce montage, qui peut sembler un peu stupide de prime abord, a pourtant de nombreuses applications : il sert de filtre passe-haut pour les vibrations<sup>9</sup>. Ce système est aussi un des exemples les plus emblématiques d'apparition du *chaos*, en effet, si on se limite pas à l'approximation des petits angles, le mouvement du double pendule n'est plus prévisible<sup>10</sup>.

Nous allons ici simplement trouver les modes de ce système qui est fortement contre-intuitif.

1.

$$x_1 = l_1 \sin \theta_1 \approx l_1 \theta_1$$

$$y_1 = l_1 \cos \theta_1 \approx l_1$$

$$x_2 = x_1 + l_2 \sin \theta_2 \approx x_1 + \theta_2 l_2 = l_1 \theta_1 + l_2 \theta_2$$

$$x_2 = y_1 + l_2 \cos \theta_2 \approx l_1 + l_2$$

On en déduit :

$$\theta_1 = \frac{x_1}{l}$$

$$\theta_2 = \frac{x_2 - x_1}{l}$$

2. voir 1

3.

$$m\ddot{x}_1 = -T_1 \sin \theta_1 + T_2 \sin \theta_2 \approx -T_1 \theta_1 + T_2 \theta_2$$

$$m\ddot{x}_2 = -T_2 \sin \theta_2 \approx -T_2 \theta_2$$

$$m\dot{y}_1 = 0 = mg - T_1 \cos \theta_1 + T_2 \sin \theta_2 \approx mg - T_1 + T_2$$

$$m\dot{y}_2 = 0 = mg - T_2 \cos \theta_2 \approx mg - T_2$$

d'où :

$$T_2 = mg$$

$$T_1 = 2mg$$

$$m\ddot{x}_1 = -T_1 \frac{x_1}{l} + T_2 \frac{x_2 - x_1}{l}$$

$$m\ddot{x}_2 = -T_2 \frac{x_2 - x_1}{l}$$

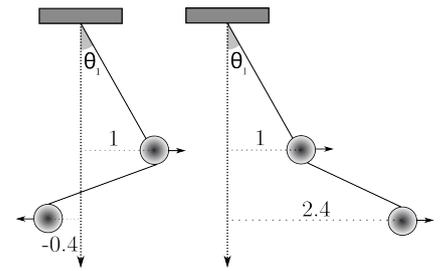


FIGURE A.3: Les deux modes du double pendule symétrique. A gauche le mode de grande pulsation et à droite le mode de petite pulsation

9. Un tel système équipe les miroirs de l'interféromètre gravitationnel géant VIRGO afin d'atténuer les vibrations dues à l'environnement.

10. Plus exactement, il dépend de façon tellement colossales des conditions initiales que l'on ne peut pas prévoir son évolution au temps long

4.

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + 3\omega_0^2 x_1 - \omega_0^2 x_2 &= 0 \\ \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 - \omega_0^2 x_1 &= 0 \end{aligned}$$

avec  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ .

5. On cherche les modes du systèmes en injectant une forme harmoniques pour les solutions :

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} -\omega^2 \ddot{x}_1 + 3\omega_0^2 x_1 - \omega_0^2 x_2 &= 0 \\ -\omega^2 \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 - \omega_0^2 x_1 &= 0 \end{aligned}$$

ce qu'on peut réécrire :

$$D \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Avec :

$$D = \begin{pmatrix} -\omega^2 + 3\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & -\omega^2 + \omega_0^2 \end{pmatrix}$$

Nous trouvons la pulsation des modes en trouvant les conditions pour lesquelles  $\det D = 0$  soit :

$$(-\omega^2 + 3\omega_0^2)(-\omega^2 + \omega_0^2) - \omega_0^4 = 0$$

soit :

$$\omega^4 - 4\omega_0^2 \omega^2 + 2\omega_0^4 = 0$$

Posons  $\Omega = \omega^2$ , nous avons alors :

$$\Omega^2 - 4\omega_0^2 \Omega + 2\omega_0^4 = 0$$

et donc :

$$\Omega = \frac{4\omega_0^2 \pm \sqrt{8}\omega_0^2}{2} = 2\omega_0^2 \pm \sqrt{2}\omega_0^2$$

d'où les pulsations des modes propres :

$$\omega^2 = 2\omega_0^2 \pm \sqrt{2}\omega_0^2$$

Cherchons la forme du premier mode propre ayant pour pulsation  $\omega^2 = \omega_0^2 (2 + \sqrt{2})$ 

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3\omega_0^2 - \omega_0^2 (2 + \sqrt{2}) & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & \omega_0^2 - \omega_0^2 (2 + \sqrt{2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= 0 \\ \begin{bmatrix} \omega_0^2 - \omega_0^2 \sqrt{2} & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & -\omega_0^2 - \omega_0^2 \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= 0 \\ \begin{bmatrix} 1 - \sqrt{2} & -1 \\ -1 & -1 - \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

Le premier mode a donc pour forme :

$$(1 - \sqrt{2}) x_1 = x_2 \quad (\text{A.8})$$

Cherchons ensuite la forme du deuxième mode propre ayant pour pulsation  $\omega^2 = \omega_0^2 (2 - \sqrt{2})$ 

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3\omega_0^2 - \omega_0^2 (2 - \sqrt{2}) & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & \omega_0^2 - \omega_0^2 (2 - \sqrt{2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= 0 \\ \begin{bmatrix} \omega_0^2 + \omega_0^2 \sqrt{2} & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & -\omega_0^2 + \omega_0^2 \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= 0 \\ \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{2} & -1 \\ -1 & -1 + \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

Le deuxième mode a donc pour forme :

$$(1 + \sqrt{2}) x_1 = x_2 \quad (\text{A.9})$$

6. En approximant  $\sqrt{2}$  par 1.4, nous voyons que le premier mode a pour forme :

$$x_2 = -0.4x_1$$

et le deuxième mode :

$$x_2 = 2.4x_1$$

Ces modes sont représentés sur la figure A.3.

### Circuits LC couplés par une capacité

On considère le montage présenté sur la figure ?? où on repère deux oscillateurs LC (équivalent à un masse-ressort) couplé par une capacité  $C'$ . Soit  $q_1$  et  $q_2$  le nombre de charge dans le condensateur du LC numéro 1 (resp. 2).

1. Écrire les deux équations différentielle couplées portant sur  $q_1$  et  $q_2$
2. (a) On considère dans un premier temps le cas symétrique,  $C_1 = C_2 = C$  et  $L_1 = L_2 = L$ 
  - (b) Résoudre le système d'équation différentielle en exploitant le fait que le système est symétrique.
  - (c) Donner la pulsation et la forme des deux modes.
  - (d) La figure ?? montre l'évolution de la tension aux bornes du condensateur 1. A partir de graphe retrouver la valeur de  $L$ ,  $C$  et  $C'$ .
  - (e) Pourquoi les oscillations présentées sur la figure ?? sont-elles amorties?
  - (f) Comment la tension montrée sur la figure ?? évolue-t-elle si
    - $C' = 0$  (on l'enlève du circuit)
    - On augmente  $C'$
    - On diminue  $C'$
3. On considère maintenant le cas général.
  - (a) Trouver la pulsation et la forme des deux modes du systèmes en appliquant la méthode de découplage vu dans le cours (cf section 3.1.3)
  - (b) Donner la pulsation et la forme des deux modes.

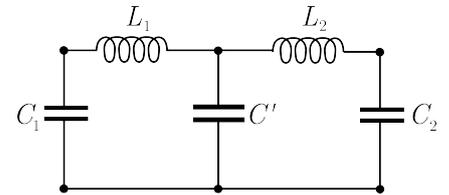


FIGURE A.4: Deux circuits LC couplés par une capacité  $C'$  (cf ex A)

### Prise en compte des frottements

#### Pendule de torsion non symétrique en régime libre

Cas symétrique

1. Pour le pendule 1, le TMC le long de l'axe de rotation donne :

$$J\ddot{\theta}_1 = -c\theta_1 + c'(\theta_2 - \theta_1)$$

et pour le pendule 2 :

$$J\ddot{\theta}_2 = -c\theta_2 + c'(\theta_1 - \theta_2)$$

2. Le système étant symétrique on pourrait découpler facilement le système en posant  $u = \theta_1 + \theta_2$  et  $v = \theta_1 - \theta_2$ . Les calculs sont décrits dans le cours et l'exercice précédent. En préparation de la question suivante nous allons plutôt utiliser la méthode générale.
  - (a) On cherche les modes propres en injectant une solution sous la forme harmonique dans le système.

Soit donc :

$$\Theta = \begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t}$$

On cherche des solutions sous cette forme en les injectant dans les équations différentielles gouvernant le système.

- (b) On aboutit à une équation aux valeurs propres.

En effet, on obtient :

$$M\Theta = J\omega^2\Theta$$

avec

$$\begin{pmatrix} c + C' & -C' \\ -C' & c + C' \end{pmatrix}$$

- (c) On obtient les pulsations possibles pour les modes en trouvant les valeurs propres de la matrice  $M$ . Cela passe par la condition de nullité du déterminant de la matrice  $D = M - \omega^2 I$ .

Ici :

$$D \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Avec

$$D = \begin{pmatrix} -J\omega^2 + c + C' & -C' \\ -C' & -J\omega^2 + c + C' \end{pmatrix}$$

det  $D = 0$  s'écrit :

$$(-J\omega^2 + c + C')(-J\omega^2 + c + C') - (-C')(-C') = 0$$

puis :

$$(-J\omega^2 + c + C') = \pm C'$$

et

$$\omega_l^2 = \frac{c}{J} \quad \text{ou} \quad \omega_r^2 = \frac{c + 2C'}{J}$$

- (d) On trouve "la forme" des modes en trouvant les vecteurs propres de la matrice  $M$ . Pour ce faire, on injecte une à une les valeurs propres obtenues à l'étape précédente.

Commençons par  $\omega_l^2 = \frac{c}{J}$ ,  $D$  devient :

$$D = C' \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

et l'équation matricielle conduit à  $A_1 = A_2$ , c'est à dire le mode symétrique.

Le deuxième mode correspond à la pulsation  $\omega_r^2 = \frac{c + 2C'}{J}$ , et donne la matrice  $D$  égale à :

$$D = C' \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

et l'équation matricielle conduit à  $A_1 = -A_2$ , c'est à dire le mode anti-symétrique.

- (e) La solution générale est alors une combinaison linéaire des modes propres.

$$\begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{pmatrix} = A_l \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_s + \Phi_s) + A_r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_r + \Phi_r)$$

*Cas non symétrique*

1. On reprend les étapes précédentes, cette fois la matrice  $D$  s'écrit :

$$D = \begin{pmatrix} -J\omega^2 + c + \Delta c + C' & -C' \\ -C' & -J\omega^2 + c + C' \end{pmatrix}$$

On cherche la valeur des pulsations des modes propres en trouvant les valeurs qui annulent le déterminant de  $D$  :

$$(-J\omega^2 + c + \Delta c + C')(-J\omega^2 + c + C') - (-C')(-C') = 0$$

Soit :

$$J^2\omega^4 - J(2c + 2C' + \Delta c)\omega^2 + c^2 + cC' + \Delta c(c + c') + C'c + C'^2 - C'^2 = 0$$

Puis en posant  $\Omega = \omega^2$  :

$$\Omega^2 - \frac{(2c + 2C' + \Delta c)}{J}\Omega + \frac{c^2 + 2cC' + \Delta c(c + c')}{J^2} = 0$$

Ce qui donne comme valeur pour  $\Omega$  :

$$\Omega = \frac{1}{2} \left( \frac{(2c + 2C' + \Delta c)}{J} \pm \sqrt{\Delta} \right)$$

avec pour discriminant  $\Delta$  :

$$\Delta = \left( \frac{(2c + 2C' + \Delta c)}{J} \right)^2 - 4 \frac{c^2 + 2cC' + \Delta c(c + c')}{J^2}$$

soit en développant :

$$\Delta = \frac{1}{J^2} (4c^2 + 4cC' + 2c\Delta c + 4C'^2c + 4C'^2 + 2C'\Delta c + 2c\Delta c + 2C'\Delta c + (\Delta c)^2 - 4c^2 - 8cC' - 4\Delta c(c + c')) \quad (\text{A.10})$$

et

$$\Delta = \frac{4C'^2 + (\Delta c)^2}{J^2}$$

11. Si à cette étape on fait  $\Delta c = 0$ , on retombe sur  $\Omega = \left( \frac{(c + C')}{J} \pm \frac{C'}{J} \right)$ , comme dans le cas symétrique

d'où<sup>11</sup> :

$$\Omega = \frac{1}{2} \left( \frac{(2c + 2C' + \Delta c)}{J} \pm \sqrt{\frac{4C'^2 + (\Delta c)^2}{J^2}} \right)$$

D'où les deux pulsations des modes propres :

$$\omega_1 = \pm \sqrt{\left(\frac{c + C' + \Delta c/2}{J} + \sqrt{\frac{C'^2 + (\Delta c/2)^2}{J^2}}\right)}$$

$$\omega_2 = \pm \sqrt{\left(\frac{c + C' + \Delta c/2}{J} - \sqrt{\frac{C'^2 + (\Delta c/2)^2}{J^2}}\right)}$$

2. On injecte successivement les pulsations propres dans  $D$ , en commençant par  $\omega_1$  :

$$D = \begin{pmatrix} -c - C' - \frac{\Delta c}{2} - \sqrt{C'^2 + (\Delta c/2)^2} + c + \Delta c + C' & -C' \\ -C' & -c - C' - \frac{\Delta c}{2} - \sqrt{C'^2 + (\Delta c/2)^2} + c + C' \end{pmatrix}$$

soit

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\Delta c}{2} - \sqrt{C'^2 + (\Delta c/2)^2} & -C' \\ -C' & -\frac{\Delta c}{2} - \sqrt{C'^2 + (\Delta c/2)^2} \end{pmatrix}$$

Ce qui donne pour la première équation <sup>12</sup> de  $D\Theta = 0$  :

$$\left[\frac{\Delta c}{2} - \sqrt{C'^2 + (\Delta c/2)^2}\right] \theta_1 - C' \theta_2 = 0$$

12. la deuxième équation contient la même information

d'où :

$$\theta_1 = \theta_2 \frac{C'}{\Delta c/2 - \sqrt{C'^2 + (\Delta c/2)^2}}$$

ce qui définit <sup>13</sup> la forme du mode 1.

Pour le mode 2 associé à la pulsation  $\omega_2$  :

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\Delta c}{2} + \sqrt{C'^2 + (\Delta c/2)^2} & -C' \\ -C' & -\frac{\Delta c}{2} + \sqrt{C'^2 + (\Delta c/2)^2} \end{pmatrix}$$

Ce qui donne pour la première équation de  $D\Theta = 0$  :

$$\left[\frac{\Delta c}{2} + \sqrt{C'^2 + (\Delta c/2)^2}\right] \theta_1 - C' \theta_2 = 0$$

d'où :

$$\theta_1 = \theta_2 \frac{C'}{\Delta c/2 + \sqrt{C'^2 + (\Delta c/2)^2}}$$

ce qui définit la forme du mode 2.

13. Pour  $\Delta c = 0$ , c'est à dire retour au système symétrique, on retrouve bien le mode symétrique  $\theta_1 = \theta_2$

1. On obtient pour le cas symétrique :

$$\omega_l = \sqrt{\frac{c}{J}} = 1 \text{ rad s}^{-1}$$

$$\omega_r = \sqrt{\frac{c + 2C'}{J}} = 1.18 \text{ rad s}^{-1}$$

et dans le cas dissymétrique avec un désaccord  $\Delta c/c$  de 10% :

$$\omega_1 = \pm \sqrt{\left(\frac{c + C' + \Delta c/2}{J} + \sqrt{\frac{C'^2 + (\Delta c/2)^2}{J^2}}\right)} = 1.20 \text{ rad s}^{-1}$$

$$\omega_2 = \pm \sqrt{\left(\frac{c + C' + \Delta c/2}{J} - \sqrt{\frac{C'^2 + (\Delta c/2)^2}{J^2}}\right)} = 1.02 \text{ rad s}^{-1}$$

Ce qui entraîne une variation de quelques pourcents sur la valeur des pulsations des modes du système.

Pour le premier mode propre nous trouvons numériquement :

$$\theta_1 = \theta_2 \frac{C'}{\Delta c/2 - \sqrt{C'^2 + (\Delta c/2)^2}} = -1.03\theta_2$$

soit quasiment le mode antisymétrique. Et pour le deuxième mode :

$$\theta_1 = \theta_2 \frac{C'}{\Delta c/2 + \sqrt{C'^2 + (\Delta c/2)^2}} = 1.03\theta_2$$

soit quasiment le mode symétrique.

2. La solution générale s'écrit :

$$\begin{aligned}\theta_1(t) &= A_1 \cos(\omega_1 t + \Phi_1) + 1.03A_2 \cos(\omega_2 t + \Phi_2) \\ \theta_2(t) &= A_1 \cos(\omega_1 t + \Phi_1) - 1.03A_2 \cos(\omega_2 t + \Phi_2)\end{aligned}$$

$A_1, A_2, \Phi_1, \Phi_2$  sont donnés par les conditions initiales qui sont les mêmes que dans l'exercice précédents. Au final, on a donc :

$$\begin{aligned}\theta_1(t) &= \frac{1}{2} \cos(\omega_1 t) + \frac{1.3}{2} \cos(\omega_2 t) \\ \theta_2(t) &= \frac{1}{2} \cos(\omega_1 t) - \frac{1.3}{2} \cos(\omega_2 t)\end{aligned}$$

### Oscillateur en régime forcé sans frottement

1. Le PFD donne :

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{x}_1 &= -k_1 x_1 + K(x_2 - x_1) + F_1 \cos \omega t \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -k_2 x_2 + K(x_1 - x_2)\end{aligned}$$

2. En régime permanent, le système oscille à la fréquence  $\omega$  imposée par l'excitation extérieure,  $x_1$  et  $x_2$  ont donc un mouvement harmonique qui peut s'écrire :

$$\begin{aligned}x_1(t) &= X_1 \cos(\omega t + \phi_1) = \text{Re} [X_1 e^{i\omega t}] \\ x_2(t) &= X_2 \cos(\omega t + \phi_2) = \text{Re} [X_2 e^{i\omega t}]\end{aligned}$$

Le PFD devient :

$$-m_1 \omega^2 X_1 e^{i\omega t} = -k_1 X_1 e^{i\omega t} + K(X_2 e^{i\omega t} - X_1 e^{i\omega t}) + F_1 e^{i\omega t} \quad (\text{A.11})$$

$$-m_2 \omega^2 X_2 = -k_2 X_2 + K(X_1 - X_2) \quad (\text{A.12})$$

Reste maintenant à résoudre ce système de deux équations à deux inconnues. De la deuxième équation (A.12), on tire

$$\underline{X_2} = \frac{K}{-m_2 \omega^2 + k_2 + K} \underline{X_1}$$

ce qui injecté dans la première équation (A.11) donne :

$$-m_1 \omega^2 \underline{X_1} = -(k_1 + K) \underline{X_1} + K \frac{K}{-m_2 \omega^2 + k_2 + K} \underline{X_1} + F_1$$

puis :

$$\underline{X_1} = \frac{F_1}{-m_1 \omega^2 + k_1 + K - \frac{K^2}{-m_2 \omega^2 + k_2 + K}}$$

soit :

$$\underline{X_1} = \frac{F_1 (-m_2 \omega^2 + k_2 + K)}{(-m_1 \omega^2 + k_1 + K)(-m_2 \omega^2 + k_2 + K) - K^2} \quad (\text{A.13})$$

En effectuant de même pour  $\underline{X_2}$ , on obtient :

$$\underline{X_2} = \frac{KF_1}{(-m_1 \omega^2 + k_1 + K)(-m_2 \omega^2 + k_2 + K) - K^2}$$

3. Supprimer le ressort  $k_2$  revient mathématiquement à faire  $k_2 = 0$ , ce qui donne :

$$\underline{X_1} = \frac{F_1 (-m_2 \omega^2 + K)}{(-m_1 \omega^2 + k_1 + K)(-m_2 \omega^2 + K) - K^2}$$

et  $\underline{X_1}$  s'annule pour :

$$\omega_e = \sqrt{\frac{K}{m_2}} \quad (\text{A.14})$$

Dis autrement, si à un système oscillant "masse-ressort",  $m_1$  et  $k_1$ , on ajoute un ressort  $K$  et une masse  $m_2$ , alors, en choisissant judicieusement  $K$  et  $m_2$ , on peut étouffer la vibration de la masse  $m_1$  pour la pulsation  $\omega_e$  souhaitée.

### Étouffement de la vibration

Le PFD appliqué aux deux masses  $m_1$  et  $m_2$  projeté selon l'axe vertical permet d'obtenir le système d'équations différentielles couplées qui gouvernent le système :

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -k_1 x_1 - \alpha \dot{x}_1 - k_2 (x_1 - x_2) + F(t) \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -k_2 (x_2 - x_1) \end{aligned}$$

En régime forcé, on sait que le système oscillera de façon harmonique à la pulsation  $\omega$ . On cherche donc les solutions sous la forme :

$$\begin{aligned} x_1(t) &= X_1 \cos(\omega t + \phi_1) = \operatorname{Re} \left[ \underline{X}_1 e^{i\omega t} \right] \\ x_2(t) &= X_2 \cos(\omega t + \phi_2) = \operatorname{Re} \left[ \underline{X}_2 e^{i\omega t} \right] \end{aligned}$$

et les équations précédentes deviennent :

$$\begin{aligned} -m_1 \omega^2 \underline{X}_1 &= -k_1 \underline{X}_1 - i\alpha \omega \underline{X}_1 - k_2 (\underline{X}_1 - \underline{X}_2) + F_m \\ -m_2 \omega^2 \underline{X}_2 &= -k_2 (\underline{X}_2 - \underline{X}_1) \end{aligned}$$

et donc :

$$\underline{X}_2 = \frac{k_2}{k_2 - m_2 \omega^2} \underline{X}_1$$

ce que l'on réinjecte dans la première équation :

$$\underline{X}_1 \left( -m_1 \omega^2 + k_1 + i\alpha \omega + k_2 - \frac{k_2^2}{k_2 - m_2 \omega^2} \right) = F_m$$

ce qui donne :

$$\underline{X}_1 = \frac{F_m (k_2 - m_2 \omega^2)}{(-m_1 \omega^2 + k_1 + i\alpha \omega + k_2)(k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2}$$

On en déduit que  $\underline{X}_1 = 0$  si  $m_2 = \frac{k_2}{\omega^2}$

## TD 4

### Trois oscillateurs couplés

1. Le PFD projeté selon l'axe  $x$  et pour les 3 masses donne :

$$\begin{aligned} m \ddot{x}_1 &= -kx_1 + k(x_2 - x_1) \\ m \ddot{x}_2 &= k(x_1 - x_2) + k(x_3 - x_2) \\ m \ddot{x}_3 &= -kx_3 + k(x_2 - x_3) \end{aligned}$$

soit en introduisant la pulsation  $\omega_0^2 = 2k/m$  :

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \omega_0^2/2 x_2 - \omega_0^2 x_1 \\ \ddot{x}_2 &= \omega_0^2/2 x_1 - \omega_0^2 x_2 + \omega_0^2/2 x_3 \\ \ddot{x}_3 &= \omega_0^2/2 x_2 - \omega_0^2 x_3 \end{aligned}$$

2. On cherche les évolutions harmoniques du système. Nous pouvons alors écrire :

$$x_1 = a_1 \exp(i\omega t) \quad x_2 = a_2 \exp(i\omega t) \quad x_3 = a_3 \exp(i\omega t)$$

ce qui injecté dans le système d'équations précédents et simplification par  $\exp(i\omega t)$  donne :

$$\begin{aligned} -\omega^2 a_1 &= \omega_0^2/2 a_2 - \omega_0^2 a_1 \\ -\omega^2 a_2 &= \omega_0^2/2 a_1 - \omega_0^2 a_2 + \omega_0^2/2 a_3 \\ -\omega^2 a_3 &= \omega_0^2/2 a_2 - \omega_0^2 a_3 \end{aligned}$$

ce qui peut se réécrire :

$$\begin{aligned} (-\omega^2 + \omega_0^2) a_1 - \omega_0^2/2 a_2 &= 0 \\ -\omega_0^2/2 a_1 + (-\omega^2 + \omega_0^2) a_2 - \omega_0^2/2 a_3 &= 0 \\ -\omega_0^2/2 a_2 + (-\omega^2 + \omega_0^2) a_3 &= 0 \end{aligned}$$

ou encore :

$$D \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec :

$$D = \begin{pmatrix} -\omega^2 + \omega_0^2 & -\omega_0^2/2 & 0 \\ -\omega_0^2/2 & -\omega^2 + \omega_0^2 & -\omega_0^2/2 \\ 0 & -\omega_0^2/2 & -\omega^2 + \omega_0^2 \end{pmatrix}$$

La nullité du déterminant de  $D$  s'écrit :

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^3 - (\omega_0^2 - \omega^2) \frac{\omega_0^4}{2} = 0$$

ce qui se factorise en :

$$(\omega_0^2 - \omega^2) \left[ (\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \frac{\omega_0^4}{2} \right] = 0$$

soit, en posant  $\Omega = \omega^2$  :

$$(\omega_0^2 - \Omega) \left[ (\Omega^2 - 2\Omega\omega_0^2 + \frac{\omega_0^4}{2}) \right] = 0$$

Il y a alors une solution assez évidente pour  $\omega$  :  $\omega^2 = \omega_0^2$ . Les deux autres solutions sont obtenues à partir de l'équation du 2nd degré portant sur  $\Omega$  et qui donne <sup>14</sup> :

$$\Omega = \omega^2 = \omega_0^2 \pm \sqrt{2}/2\omega_0^2$$

On obtient donc les 3 pulsations des 3 modes qui, classées par ordre croissant sont :

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \omega_0^2 - \sqrt{2}/2\omega_0^2 \\ \omega_2^2 &= \omega_0^2 \\ \omega_3^2 &= \omega_0^2 + \sqrt{2}/2\omega_0^2 \end{aligned}$$

3. on retrouve la forme des modes en injectant la pulsation des modes propres dans le système d'équations différentielles.

Cela donne pour le mode 1 tel que  $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \sqrt{2}/2\omega_0^2$  :

$$\begin{pmatrix} -\omega_0^2 + \sqrt{2}/2\omega_0^2 + \omega_0^2 & -\omega_0^2/2 & 0 \\ -\omega_0^2/2 & -\omega_0^2 + \sqrt{2}/2\omega_0^2 + \omega_0^2 & -\omega_0^2/2 \\ 0 & -\omega_0^2/2 & -\omega_0^2 + \sqrt{2}/2\omega_0^2 + \omega_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

soit pour la première ligne :

$$(-\omega_0^2 + \sqrt{2}/2\omega_0^2)a_1 - \omega_0^2/2a_2 = 0 \leftrightarrow a_1 = a_2$$

et pour la deuxième ligne :

$$-\omega_0^2/2a_1 + (-\omega_0^2 + \sqrt{2}/2\omega_0^2)a_2 - \omega_0^2/2a_3 = 0 \leftrightarrow a_3 = a_1$$

Pour le mode 2 tel que  $\omega_2^2 = \omega_0^2$  :

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_0^2/2 & 0 \\ -\omega_0^2/2 & 0 & -\omega_0^2/2 \\ 0 & -\omega_0^2/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

soit pour la première ligne :

$$-\omega_0^2/2a_2 = 0 \leftrightarrow a_2 = 0$$

et pour la deuxième ligne :

$$-\omega_0^2/2a_1 - \omega_0^2/2a_3 = 0 \leftrightarrow a_3 = -a_1$$

Pour le mode 3 tel que  $\omega_3^2 = \omega_0^2 + \sqrt{2}/2\omega_0^2$  :

$$\begin{pmatrix} -\omega_0^2 - \sqrt{2}/2\omega_0^2 + \omega_0^2 & -\omega_0^2/2 & 0 \\ -\omega_0^2/2 & -\omega_0^2 - \sqrt{2}/2\omega_0^2 + \omega_0^2 & -\omega_0^2/2 \\ 0 & -\omega_0^2/2 & -\omega_0^2 - \sqrt{2}/2\omega_0^2 + \omega_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

soit pour la première ligne :

$$(-\omega_0^2 - \sqrt{2}/2\omega_0^2)a_1 - \omega_0^2/2a_2 = 0 \leftrightarrow a_1 = a_2$$

et pour la deuxième ligne :

$$-\omega_0^2/2a_1 + (-\omega_0^2 - \sqrt{2}/2\omega_0^2)a_2 - \omega_0^2/2a_3 = 0 \leftrightarrow a_3 = a_1$$

14. Le discriminant  $\Delta$  de ce polynome est  $\Delta = 4\omega_0^4 - 4 \times \omega_0^4/2 = 2\omega_0^4$

*Pendules couplés - équation de Klein Gordon*

1. Le TMC appliqué au  $n$ -ème pendule, au point fixe  $O_n$ , et en projection selon l'axe  $O_z$ , dans l'approximation des petits angles donne :

$$ml^2\ddot{\theta}_n = -mgl\theta_n + kl^2(\theta_{n-1} - 2\theta_n + \theta_{n+1})$$

En effet, le moment de la force de rappel du ressort peut s'écrire (cf exercice 3.3) :

$$\mathbf{M}_k(O_n) = (kl^2(\tan \theta_{n-1} - \tan \theta_n) + kl^2(\tan \theta_{n+1} - \tan \theta_n))\mathbf{e}_z$$

En effet, pour un angle  $\theta_n$ , l'écart sur l'axe  $x$  entre les deux pendules vaut environ  $\psi_n = l\theta_n$ . On obtient pour les petits angles :

$$\mathbf{M}_k(O_n) = kl(\theta_{n-1} - 2\theta_n + \theta_{n+1})\mathbf{e}_z$$

2. Avec  $\psi_n \approx l\theta_n$ , position d'écart à l'équilibre, l'équation précédente devient :

$$\ddot{\psi}_n = -\frac{g}{l}\psi_n + \frac{k}{m}(\psi_{n-1} - 2\psi_n + \psi_{n+1})$$

soit

$$\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial t^2} = -\Omega_0 \psi_n + \omega_0^2(\psi_{n-1} - 2\psi_n + \psi_{n+1})$$

3. On reprend au choix la méthode développée dans la section 4.2 ou bien celle expliquée en note de bas de page de la même section. On choisit ici la deuxième méthode. Effectuons un développement de Taylor à l'ordre 2 de  $\psi_n$  :

$$\psi_{n-1} = \psi(x - \Delta x) = \psi(x) - \Delta x \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + \dots$$

et

$$\psi_{n+1} = \psi(x + \Delta x) = \psi(x) + \Delta x \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + \dots$$

Au premier ordre on peut donc écrire l'équation de la question précédente sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial t^2} = & -\Omega_0 \psi(x) + \omega_0^2 \left( \psi(x) - \Delta x \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} \right. \\ & - 2\psi(x) \\ & \left. + \psi(x) + \Delta x \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} \right) \end{aligned}$$

et nous trouvons l'équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \Omega_0^2 \psi = 0$$

Ce n'est pas l'équation de d'Alembert à cause du terme  $\Omega_0^2 \psi$ . Cette équation d'onde est appelée équation de Klein Gordon. Sa relation de dispersion est plus compliquée qu'une équation de d'Alembert.

*TD 5 - Éléments de correction*

*Ondes sonores dans un solide élastique.*

1. Remarquons d'abord que  $\ell = dx$  et ensuite :

$$\Delta \ell = \underbrace{([x + dx + \zeta(x + dx, t)] - [x + \zeta(x, t)])}_{\text{après}} - \underbrace{dx}_{\text{avant}} = \zeta(x + dx, t) - \zeta(x, t)$$

- 2.

$$F = ES \frac{\Delta \ell}{\ell} = ES \frac{\zeta(x + dx, t) - \zeta(x, t)}{dx} = ES \frac{\partial \zeta(x, t)}{\partial x}$$

et donc :

$$\mathbf{F}(x) = ES \frac{\partial \zeta(x, t)}{\partial x} \mathbf{e}_x$$

- 3.

$$m\ddot{\zeta}(x, t)\mathbf{e}_x = \mathbf{F}_{g \rightarrow g}(x, t) + \mathbf{F}_{d \rightarrow g}(x + dx, t)$$

ce qui projeté sur l'axe  $x$  donne :

$$m\ddot{\zeta}(x, t)\mathbf{e}_x = -F(x, t) + F(x + dx, t)$$

et donc :

$$\rho S dx \frac{\partial^2 \zeta(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial F}{\partial x} dx$$

4. A partir des deux équations des questions précédentes, on obtient :

$$\rho S \frac{\partial^2 \zeta(x, t)}{\partial t^2} = ES \frac{\partial^2 \zeta(x, t)}{\partial x^2}$$

et donc :

$$\frac{\partial \zeta(x, t)}{\partial x} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \zeta(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

5.

$$C = 5 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}$$

## TD 6 - Éléments de correction

### Développement en série de Fourier d'un signal triangulaire

Un signal triangulaire  $f_{\text{triangle}}(t)$  de période  $T$  est défini par :

$$f_{\text{triangle}}(t) = \begin{cases} \frac{a}{T/4}t, & \text{si } 0 \leq t \leq T/4 \\ 2a - \frac{4a}{T}t, & \text{si } T/4 < t < 3T/4 \\ -4a + \frac{4a}{T}t, & \text{si } 3T/4 < t < T \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

Calculer son développement en série de Fourier.

### Développement en série de Fourier d'un signal en dent de scie

Un signal triangulaire  $f_{\text{dent de scie}}(t)$  de période  $T$  est défini par :

$$f_{\text{Dent de scie}}(t) = \begin{cases} \frac{2a}{T}t, & \text{si } +T/2 \leq t \leq T/2 \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

Calculer son développement en série de Fourier.

### TF d'un cosinus

Soit un signal  $f(t) = \cos \omega_0 t$  représentant un cosinus idéal c'est-à-dire allant temporellement de  $t \in [-\infty, \infty]$ .

1. Quelle est sa transformée de Fourier ?
2. En quoi cette TF diffère-t-elle de celle d'un sinus ?

### TF d'une sinusoïde tronquée

Soit un signal représentant une sinusoïde tronquée dans le temps c'est à dire :

$$f_{\text{sinus tronqué}}(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < -t_f \\ \sin \omega_0 t, & \text{si } t_f 0 \leq t \leq t_f \\ 0, & \text{si } t > t_f \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

1. Quelle est sa transformée de Fourier ?
2. Interpréter ce résultat en terme de convolution entre la fonction sinus et la fonction porte.

### TF d'une oscillation exponentiellement amortie

Soit la fonction  $f(t) = \exp(-t/\tau) \sin \omega_0 t$ , souvent rencontrée en physique car elle décrit les oscillations d'un oscillateur amortie.

1. Quelle est sa transformée de Fourier ? Vérifier que l'on retrouve bien l'expression 2.7 de la page 32, pour l'évolution harmonique forcée d'un oscillateur amorti.

2. Une fonction lorentzienne  $L(x)$  est définie par :

$$L(x) = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\Gamma\right)^2 + (x - x_0)^2} \quad (\text{A.18})$$

Montrer que le module de la TF calculer précédemment est une lorentzienne.

3. Dans des conditions expérimentales bien particulière il est possible de mesurer ce que l'on appelle la *largeur naturelle* d'une raie spectrale. Le spectre d'une raie d'une lampe spectrale (comme la raie verte de la lampe mercure par exemple) a alors profil lorentzien. A partir de cette constatation expérimentale quelle modèle simple pour l'atome pourrait-on donner pour expliquer l'émission de cette lumière ?

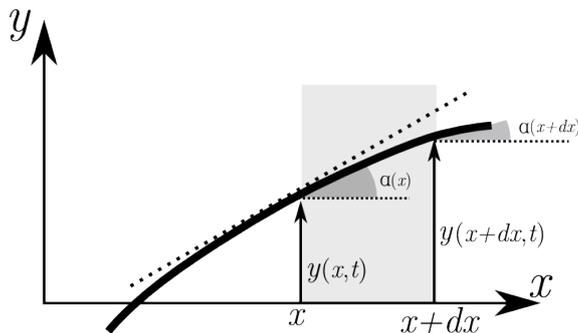
## TD 7 - Éléments de correction

### "Dessine moi une onde plane"

Dessiner (ou plutôt schématiser) :

1. L'onde dure éternellement avec la même amplitude mais à une extension spatiale limitée.
2. L'onde a une extension spatiale infinie avec une amplitude constante dans un plan, mais ne dure pas éternellement
3. L'onde a une extension spatiale infinie avec une amplitude constante dans un plan et dure éternellement avec la même amplitude
4. L'onde n'a pas d'extension spatiale infinie et ne dure pas éternellement.

### Équation d'onde transversale le long d'une corde



1. Le bout de corde de longueur  $dx$  subit deux forces (cf figure A) :

- La tension de la corde  $T(x)$  en  $x$
- La tension de la corde  $T(x + dx)$  en  $x + dx$

Le PFD appliqué au bout de corde donne :

$$m\ddot{x} = 0 = -T(x) \cos \alpha(x) + T(x + dx) \cos \alpha(x + dx) \approx T(x) + T(x + dx)$$

$$m\dot{y} = -T(x) \sin \alpha(x) + T_y(x + dx) \sin \alpha(x + dx) \approx -T(x)\alpha(x) + T_y(x + dx)\alpha(x + dx)$$

2. La première équation, où l'accélération dans la direction  $x$  est nulle car on suppose que les mouvements sont purement verticaux, donne :

$$T(x) = T(x + dx) \Rightarrow T(x) = cste = T_0$$

La valeur de la tension de la corde est donc constante le long de la corde pour les petites oscillations.

3. Le PFD selon  $y$  donne lui :

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0(\alpha(x + dx) - \alpha(x)) = T_0 \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx$$

or  $\alpha$  est l'angle entre l'axe  $x$  et la droite tangente à la courbe. C'est-à-dire la dérivée de la courbe  $y(x)$ . Donc  $\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$ .

Ce qui donne en remplaçant dans l'équation précédente :

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

qui est bien l'équation de d'Alembert avec une vitesse de l'onde  $c$  égale à :

$$c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$$

*Relation de dispersion à partir d'une équation de Klein Gordon*

L'équation d'onde de Klein-Gordon a été établie à l'exercice 4.3 p.75 :

$$\frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + \Omega_0^2 \psi(x, t) = 0$$

1. On injecte une onde plane monochromatique dans l'équation d'onde pour aboutir à la relation de dispersion

$$\omega^2 - c^2 k^2 + \Omega_0^2 = 0$$

ce qui peut se réécrire :

$$k(\omega) = \frac{\sqrt{\omega^2 - \Omega_0^2}}{c}$$

2. Le nombre d'onde  $|k|$  devient imaginaire, l'onde est évanescente (cf chap10)

*Relation de structure des ondes sonores et des ondes dans un câble coaxiale*

1. A partir des deux équations couplant le champ de surpression et le champ des vitesses (cf eq 5.13 et 5.17 p.82) :

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{et} \quad \chi_S \frac{\partial p}{\partial t} = - \frac{\partial v}{\partial x}$$

Trouver la relation de structure et l'impédance propagative d'un milieu pour la propagation d'une onde sonore.

Pour ce faire, on utilisera une onde plane monochromatique en écriture complexe à la fois pour la vitesse et la surpression que l'on injectera dans les relations de couplage.

On traitera d'abord le cas de l'onde progressive, puis de l'onde régressive.

2. Faire de même pour les ondes électromagnétiques le long d'un câble coaxiale. On redonne les deux équations de couplage (cf eq 5.20 et 5.21 p.85) :

$$\Gamma \frac{\partial V}{\partial t} = - \frac{\partial I}{\partial x} \quad \text{et} \quad - \frac{\partial V}{\partial x} = \Lambda \frac{\partial I}{\partial t}$$

*TD 8 - Éléments de correction*

*Réflexion partielle d'une onde sonore plane sur une section de tuyau*

voir figure A et A p.203

*Réflexion et transmission sur un obstacle mobile*

voir figure A et A p.212

*Adaptation d'impédance pour couche anti-reflet acoustique*

voir figure A et A p.213

Les conditions aux limites sont : continuité des vitesses et de pressions aux deux interfaces en  $x = 0$  (1)/(i) et  $x = L$  (i)/(2).

Pour le champ des vitesses :

②) On remarque qu'ici, l'impédance définie pour une onde progressive comme  $Z_{opp} = \frac{p}{v} = \mu_0 c$  est la même de chaque côté: c'est le même fluide.

Déterminons les ondes de pression:

A  $\underline{u}_i(x,t)$  on peut associer  $p_i(x,t) = Z_{opp} \underline{u}_i(x,t) = \mu_0 c V_0 e^{j(\omega t - kx)}$

A  $\underline{u}_r(x,t)$  on peut associer  $p_r(x,t) = -Z_{opp} \underline{u}_r(x,t) = -r \mu_0 c V_0 e^{j(\omega t - kx)}$

(attention, l'onde réfléchie est régressive, signe  $\ominus$ !)

A  $\underline{u}_t(x,t)$  on peut associer  $p_t(x,t) = Z_{opp} \underline{u}_t(x,t) = t \mu_0 c V_0 e^{j(\omega t - kx)}$

\* écrivons la continuité des pressions entre  $x=0^-$  (1) et  $x=0^+$  (2):

$$p_i(x=0^-, t) + p_r(x=0^-, t) = p_t(x=0^+, t)$$

$$Z_{opp} V_0 (1-r) e^{j\omega t} = Z_{opp} V_0 t e^{j\omega t} \Rightarrow \boxed{1-r=t} \quad (1)$$

\* le débit étant  $\mu_0 S v$ , écrivons la conservation des débits de part et d'autre:

$$\mu_0 S_1 \underline{u}_i(x=0^-, t) + \mu_0 S_1 \underline{u}_r(x=0^-, t) = \mu_0 S_2 \underline{u}_t(x=0^+, t)$$

$$\boxed{S_1 (1+r) = S_2 t} \quad (2)$$

De (1) et (2), on tire:

$$\boxed{t = \frac{2S_1}{S_1 + S_2} \quad r = \frac{S_2 - S_1}{S_1 + S_2}}$$

2) On sait que pour l'onde plane progressive, le vecteur densité de flux d'énergie moyen est  $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} Z_{opp} V_0^2 \vec{e}_x$

La puissance incidente moyenne est donc  $\langle P_i \rangle = \frac{1}{2} Z_{opp} V_0^2 S_1$

— La continuité des vitesses en  $x=0$ :

$$v_1(x=0, t) = v_i(x=0, t)$$

d'où

$$\underline{V}_0 = \underline{A} + \underline{B}$$

— Continuité des vitesses en  $x=L$ :

$$v_i(x=L, t) = v_2(x=L, t)$$

d'où

$$\underline{A} e^{-jk_1 L} + \underline{B} e^{jk_1 L} = t \underline{V}_0 e^{jk_2 L}$$

Pour le champ des pressions:

— La continuité des pressions en  $x=0$ :

$$p_1(x=0, t) = p_i(x=0, t)$$

d'où

$$\underline{V}_0 = \underline{A} + \underline{B}$$

La puissance réfléchiée moyenne (vers  $-\vec{e}_z$ ) est donc  $\langle P_R \rangle = \frac{1}{2} Z_{0pp} r^2 v_0^2 S_1$

La puissance transmise moyenne est donc  $\langle P_E \rangle = \frac{1}{2} Z_{0pp} t^2 v_0^2 S_2$

$$R = \frac{\langle P_R \rangle}{\langle P_i \rangle} = r^2 = \left( \frac{S_2 - S_1}{S_2 + S_1} \right)^2 ; \quad T = \frac{\langle P_E \rangle}{\langle P_i \rangle} = \frac{S_2}{S_1} t^2 = \frac{4 S_1 S_2}{(S_1 + S_2)^2}$$

Il s'agit de vérifier la conservation de l'énergie :  $\langle P_i \rangle \stackrel{?}{=} \langle P_R \rangle + \langle P_E \rangle$

Soit  $1 = R + T$  ?

$$R + T = \frac{S_2^2 - 2S_1 S_2 + S_1^2}{(S_2 + S_1)^2} + \frac{4 S_1 S_2}{(S_1 + S_2)^2} = \frac{S_2^2 + 2S_1 S_2 + S_1^2}{(S_1 + S_2)^2} = 1 : \text{OK!}$$

$$3) \quad r = \frac{S_2 - S_1}{S_2 + S_1} = \frac{x-1}{1+x} \rightarrow +1 ; \quad t = \frac{2S_1}{S_2 + S_1} = \frac{2}{1+x} \rightarrow 0$$

$$R = r^2 \rightarrow 1 ; \quad T = x \cdot t^2 = \frac{4x}{(1+x)^2} \rightarrow 0$$

$t$  et  $T$  tendent vers zéro, cela signifie que le son ne quitte pas le tuyau

4) Si le tuyau est ouvert aux deux bouts,  $T=0$  aux deux bouts, le son ne quitte pas le tuyau  $\rightarrow$  possibilité d'une onde localisée.

Comme en  $x=0$  et  $x=L$ ,  $P(t) \equiv P_0$  extérieure, les extrémités sont des nœuds de surpression acoustique ( $p = P - P_0 \equiv 0$ ), et donc des ventres de vitesse (cf  $r=+1$ )

Cf résultats généraux sur ondes stationnaires : les pulsations propres  $\omega_n$  vérifient

$$L = n \frac{\lambda_n}{2}, \quad \text{ou} \quad \omega_n = n \frac{\pi c}{L}$$

5) Un pipeau est ouvert aux deux bouts, il rayonne donc difficilement. Le pavillon de la trompette permet en revanche un passage progressif du son du tuyau sonore vers le milieu ouvert.

— Continuité des pressions en  $x=L$  :

$$v_1(x=L, t) = v_2(x=L, t)$$

d'où

$$\underline{A} e^{-jk_1 L} + \underline{B} e^{jk_1 L} = \underline{t} V_0 e^{jk_2 L}$$

## Impédance terminale complexe

## TD 9 - Éléments de correction

## Vibrations libres d'une corde

Soit l'écriture la plus générale pour une onde plane monochromatique à la fois progressive et régressive pour le champ de tension verticale :

$$\underline{T}_y(x, t) = [A_1 e^{ikx} + A_2 e^{-ikx}] e^{i\omega t}$$

On peut obtenir l'expression du champ lié à la déformation, la vitesse verticale  $v_y(x, t)$  via la relation de structure :

$$v_y(x, t) = \frac{1}{Z} [-A_1 e^{ikx} + A_2 e^{-ikx}] e^{i\omega t}$$

1. La condition de fixation libre en  $x = 0$  que la grandeur lié à la contrainte,  $T_y(x, t)$  soit nulle :

$$\forall t \quad \underline{T}_y(0, t) = [A_1 \times 1 + A_2 \times 1] e^{i\omega t}$$

ce qui conduit à :

$$A_1 = A = -A_2 =$$

on peut donc réécrire le champ de la tension verticale :

$$\begin{aligned} \underline{T}_y(x, t) &= A [e^{ikx} - e^{-ikx}] e^{i\omega t} \\ &= 2Ai \sin kx e^{i\omega t} \end{aligned}$$

et pour la vitesse verticale :

$$\begin{aligned} v_y(x, t) &= \frac{A}{Z} [-e^{ikx} - e^{-ikx}] e^{i\omega t} \\ &= -2 \frac{A}{Z} \cos kx e^{i\omega t} \end{aligned}$$

La deuxième condition aux limites, fixation libre en  $x = L$  portent aussi la grandeur liée à la contrainte et donne :

$$\forall t \quad \underline{T}_y(L, t) = 2Ai \sin(kL) e^{i\omega t} = 0$$

et donc

$$\sin k_n L = 0 \Leftrightarrow k_n = \frac{n\pi}{L}$$

D'où les pulsations  $\omega_n$  admise pour les ondes stationnaires sur la corde via la relation de dispersion :

$$\omega_n = ck_n = n \frac{c\pi}{L}$$

Au total la tension verticale sur la corde s'écrit :

$$T_y(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(\omega_n t + \Phi_n) \sin k_n x \quad \text{avec} \quad k_n = \frac{n\pi}{L} \quad \text{et} \quad \omega_n = ck_n$$

Le profil en vitesse verticale est lui :

$$v_y(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t + \Phi_n) \cos k_n x \quad \text{avec} \quad k_n = \frac{n\pi}{L} \quad \text{et} \quad \omega_n = ck_n$$

Il est semblable à celui d'une corde fixe à ses deux extrémités mais translatée de  $\lambda/4$ . Aux points de fixation la corde nous avons un ventre de vibration pour la grandeur liée à la déformation  $v_y(x, t)$  (cf fig 9.4).

2. La condition aux limites fixée en  $x = 0$  impose que la grandeur de déformation,  $v_y(x, t)$  soit nulle en ce point :

$$v_y(0, t) = \frac{1}{Z} [-A_1 e^{ikx} + A_2 e^{-ikx}] e^{i\omega t} = 0$$

ce qui conduit à :

$$A_1 = A_2$$

et donc :

$$\begin{aligned} v_y(x, t) &= \frac{A}{Z} [-e^{ikx} + e^{-ikx}] e^{i\omega t} \\ &= -2 \frac{A}{Z} i \sin(kx) e^{i\omega t} \end{aligned}$$

et pour la tension verticale :

$$\begin{aligned} T_y(x, t) &= A \left[ -e^{ikx} - e^{-ikx} \right] e^{i\omega t} \\ &= -2Ai \cos(kx) e^{i\omega t} \end{aligned}$$

la condition aux limites libres en  $x = L$  impose que la tension verticale soit nulle en  $x = L$  :

$$T_y(L, t) = -2Ai \cos(kL) e^{i\omega t}$$

d'où la relation de quantification pour  $k$  :

$$\cos kL = 0 \Leftrightarrow kL = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \Leftrightarrow k_n = \frac{(n + 1/2)\pi}{L}$$

Cette relation est *différente des précédentes*. Les pulsations associées via la relation de dispersion sont :

$$\omega_n = c \frac{(n + 1/2)\pi}{L}$$

et à partir de  $k_n$ , nous pouvons aussi définir la période spatiale  $\lambda_n$  :

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = 2\pi \frac{L}{(n + 1/2)\pi} = \frac{2L}{(n + 1/2)}$$

Le nombre d'oscillations d'un mode sur la corde est :

$$\frac{L}{\lambda_n} = \frac{n}{2} + \frac{1}{4}$$

Par exemple pour le mode  $n = 0$ , la corde ne présente qu'un quart de période de vibration (cf fig 9.4).

Au total la tension verticale le long de la corde s'écrit :

$$T_y(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(\omega_n + \Phi_n) \cos k_n x \quad \text{avec} \quad k_n = \frac{(n + 1/2)\pi}{L} \quad \text{et} \quad \omega_n = ck_n$$

et la vitesse verticale :

$$v_y(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(\omega_n + \Phi_n) \sin k_n x \quad \text{avec} \quad k_n = \frac{(n + 1/2)\pi}{L} \quad \text{et} \quad \omega_n = ck_n$$

### Étude des modes propres d'une corde

16. 
$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\Delta f_3}{f_2}\right)^2 + \left(f_3 \frac{\Delta f_2}{f_2^2}\right)^2}$$

1. La présence de deux fuseaux nous indique qu'il s'agit du mode numéro 2 de fréquence expérimentale  $f_2 = 19$  Hz, de même pour trois fuseaux  $f_3 = 28$  Hz, nous devons avoir  $f_2/2 = f_3/3 = f_1$  soit  $f_3/f_2 = 1.5$ . Expérimentalement nous avons <sup>16</sup>  $f_3/f_2 = 1.47 \pm 0.09$ . Ces valeurs sont donc compatibles.
2. La fréquence  $f_1$  vaut donc 9.4(5) Hz, celles des harmoniques suivantes sont données par  $f_n = nf_0$ .
3. La vitesse peut être obtenue, par exemple, par la relation  $c = f_0\lambda_0$ . La longueur d'onde du premier mode est égale à  $2L$  (ou dit autrement, dans le premier mode la corde ne représente qu'une demi période spatiale), d'où

$$c = f_0 2L = 22.0(6) \text{ m s}^{-1}$$

17. 
$$\Delta \mu = \frac{2T_0}{c^3} \Delta c$$

4. La masse étant de 25 g, la tension de la corde  $T_0$  est donc  $T_0 = mg = 2525$  N
5. La vitesse de propagation  $c$  et la masse linéique de la corde  $\mu$  sont reliées par  $c = \sqrt{T_0/\mu}$  d'où <sup>17</sup> :

$$\mu = 0.50(3) \text{ g m}^{-1}$$

### Spectre d'une corde pincée

18. Ce ne serait pas le cas par exemple pour une corde frappée comme c'est le cas par exemple pour le piano où à  $t = 0$ , la corde est frappée par un marteau. Dans ce cas, c'est le profil  $a(x, 0)$  qui est nul, la vitesse initiale elle ne l'est pas

1. La corde est lâchée sans vitesse à  $t = 0$ , par conséquent :

$$\frac{\partial a}{\partial t}(x, t = 0) = 0$$

et les coefficients  $B_n$  sont tous nuls <sup>18</sup> (cf eq. 9.12) :

$$B_n = \frac{1}{n\pi c} \int_{-L}^L \sin\left(\sin n\pi \frac{x}{L}\right) \frac{\partial a}{\partial t}(x, 0) dx = 0$$

Reste donc à calculer les  $A_n$ .

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{L} \int_0^L a(x,0) \sin\left(\sin n\pi \frac{x}{L}\right) dx \\ &= \frac{2}{L} \left( \int_0^{L/2} \frac{2h}{L} x \sin\left(\sin n\pi \frac{x}{L}\right) dx + \int_{L/2}^L \frac{2h}{L} (L-x) \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) dx \right) \end{aligned}$$

L'intégrale  $\int x \sin\left(\sin n\pi \frac{x}{L}\right) dx$ , se calcule par intégration par partie<sup>19</sup> :

$$\begin{aligned} \int x \sin\left(\sin n\pi \frac{x}{L}\right) dx &= \left[ -x \frac{L}{n\pi} \cos(n\pi x/L) \right] - \int -\frac{L}{n\pi} \cos(n\pi x/L) dx \\ &= \left[ -x \frac{L}{n\pi} \cos(n\pi x/L) \right] + \left( \frac{L}{n\pi} \right)^2 \left[ \sin n\pi \frac{x}{L} \right] \end{aligned}$$

Cette intégrale vaut, pour les bornes 0 et  $L/2$  :

$$-\frac{L^2}{2n\pi} \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

et pour les bornes  $L/2$  et  $L$  :

$$-\frac{L^2}{n\pi} \left( \cos(n\pi) - \frac{1}{2} \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) \right) + \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \left( \sin(n\pi) - \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \right)$$

Il faut aussi calculer l'intégrale :

$$\begin{aligned} \int_{L/2}^L \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) dx &= \left[ -\frac{L}{n\pi} \cos(n\pi x/L) \right]_{L/2}^L \\ &= -\frac{L}{n\pi} \left( \cos(n\pi) - \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

Au total l'intégrale vaut :

$$\begin{aligned} A_n \frac{L^2}{4h} &= -\frac{L^2}{n\pi} \frac{1}{2} \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \\ &+ \frac{L^2}{n\pi} \left( \cancel{\cos(n\pi)} - \frac{1}{2} \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) \right) - \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \left( \sin(n\pi) - \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \right) \\ &- \frac{L^2}{n\pi} \left( \cancel{\cos(n\pi)} - \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

ce qui donne après simplification :

$$A_n = \frac{4h}{(n\pi)^2} \left( 2 \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \underbrace{\sin(n\pi)}_0 \right) = \frac{8h}{(n\pi)^2} 2 \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

Nous voyons alors que pour les termes  $n$  pairs,  $A_n = 0$ , et que pour  $n = 2p + 1$  impaires on a :

$$A_{2p+1} = \frac{8h(-1)^p}{(2p+1)^2 \pi^2}$$

L'onde sur la corde peut donc s'écrire comme la somme des modes propres (des ondes stationnaires), dont nous connaissons maintenant grâce aux conditions initiales les coefficients  $A_n$  et  $B_n$  (les pulsations des modes  $\omega_n$  et la forme des modes en  $\sin k_n x$  étaient déjà connues d'avance) :

$$a(x,t) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{8h(-1)^p}{(2p+1)^2 \pi^2} \cos\left(\frac{(2p+1)\pi c}{L} t\right) \sin\left(\frac{(2p+1)\pi}{L} x\right)$$

2. On peut reprendre les intégrales précédentes, il faut maintenant simplement changer les bornes. Les calculs donnent :

$$A_n = \frac{2h}{n^2 \pi^2} \frac{L^2}{a(L-a)} \sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right)$$

3. Le terme  $A_7$  est nul pour  $\sin\left(\frac{7\pi a}{L}\right)$  nul soit pour  $a = m \frac{L}{7}$ .

On peut par exemple gratter la corde vers 1/7 ème de sa longueur, c'est d'ailleurs là où se trouve la rosace d'une guitare acoustique (où les micros d'une guitare électrique).

### Spectre d'une corde frappée

1. Chaque onde de la somme est bien le produit d'une fonction de l'espace par une fonction du temps.
2. Voir cours. La corde fixée à ses extrémités présente une périodicité de période  $2L$  ce qui permet un développement en série de Fourier. La somme de l'onde incidente et de l'onde réfléchi, ayant été écrites avec le développement en série de Fourier.
3. Le profil de la corde à  $t = 0$ ,  $(y(x, 0))$  est nul, par conséquent tous les termes  $A_n$  sont nulles. Quant aux termes  $B_n$  :

$$B_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) dx$$

Le terme  $\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0)$  est non nul uniquement sur l'intervalle  $[a, a + b]$ , où la fonction vaut  $u_0$  :

$$B_n = \frac{2}{n\pi c} \int_a^{a+b} \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) u_0 dx$$

Ce qui s'intègre facilement :

$$B_n = \frac{2}{n\pi c} \frac{Lu_0}{n\pi} \left[ -\cos\left(n\pi \frac{x}{L}\right) \right]_a^{a+b}$$

soit :

$$B_n = \frac{2Lu_0}{n^2\pi^2 c} \left[ \cos\left(n\pi \frac{a}{L}\right) - \cos\left(n\pi \frac{a+b}{L}\right) \right]$$

ce qui donne avec la formule trigonométrique  $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$  :

$$B_n = \frac{2Lu_0}{n^2\pi^2 c} \left[ \cos\left(n\pi \frac{a}{L}\right) - \left( \underbrace{\cos\left(n\pi \frac{a}{L}\right) \cos\left(n\pi \frac{b}{L}\right)}_{\approx 1} - \underbrace{\sin\left(n\pi \frac{a}{L}\right) \sin\left(n\pi \frac{b}{L}\right)}_{\approx n\pi b/L} \right) \right]$$

et :

$$B_n = \frac{2Lu_0}{n^2\pi^2 c} \frac{n\pi b}{L} \sin\left(n\pi \frac{a}{L}\right)$$

soit :

$$B_n = \frac{2u_0 b}{n\pi^2 c} \sin\left(n\pi \frac{a}{L}\right)$$

4. Mathématiquement, il faut que  $B_{n=7} = 0$ , soit :

$$B_7 = \frac{2u_0 b}{7\pi^2 c} \sin\left(7\pi \frac{a}{L}\right)$$

soit :

$$7\pi \frac{a}{L} = k\pi \Leftrightarrow a = \frac{L}{7}$$

Il faut positionner le marteau à un septième de la longueur de la corde, ce qui est d'ailleurs fait pour un piano.

5. Le spectre d'une corde pincée a pour harmonique :

$$A_{2p+1} = \frac{8h(-1)^p}{(2p+1)^2\pi^2} \quad \text{où } p \in \mathbb{N}$$

Comparer le spectre d'une corde pincée et d'une corde frappée.

20. La longueur d'onde du mode fondamentale vaut  $\lambda_1 = 4L$ , ou dit autrement, la cavité  $L$  ne fait que un quatrième de la longueur d'onde du mode fondamentale

### Caisse de résonance

1. Les conditions aux limites sont une extrémité bouchée et l'autre libre. Le mode fondamental a alors pour fréquence<sup>20</sup> (cf cours) :

$$f_1 = \frac{c}{4L}$$

On voit qu'avec une longueur  $L = 19.5$  cm, la cavité à une fréquence de résonance égale à 440 Hz, soit la fréquence à faire résonner.

2. En ouvrant le capot, on change les conditions aux limites. Le ventre de pression devient alors un noeud de pression, cela change donc les fréquences amplifiées par le bâti du piano ce qui change le timbre de l'instrument.

Mode propre d'une enceinte parallélépipédique

1.

$$\Delta F(x, y, z)e^{i\omega t} + \frac{1}{c^2}\omega^2 F(x, y, z) = 0$$

d'où

$$\Delta F(x, y, z)e^{i\omega t} + k^2 F(x, y, z) = 0$$

puis comme :

$$\Delta(f_1(x)f_2(y)f_3(z)) = \frac{d^2 f_1}{dx^2} + \frac{d^2 f_2}{dy^2} + \frac{d^2 f_3}{dz^2}$$

On obtient :

$$\frac{d^2 f_1}{dx^2} + \frac{d^2 f_2}{dy^2} + \frac{d^2 f_3}{dz^2} + k^2(f_1(x)f_2(y)f_3(z)) = 0$$

ce qui donne après division par  $f_1(x)f_2(y)f_3(z)$  :

$$\frac{1}{f_1} \frac{d^2 f_1}{dx^2} + \frac{1}{f_2} \frac{d^2 f_2}{dy^2} + \frac{1}{f_3} \frac{d^2 f_3}{dz^2} + k^2 = 0$$

Chacun de ces termes ne peut être qu'une constante, car ils dépendent de variables indépendantes D'où :

$$\frac{1}{f_1} \frac{d^2 f_1}{dx^2} = -k_1^2 \quad \frac{1}{f_2} \frac{d^2 f_2}{dy^2} = -k_2^2 \quad \frac{1}{f_3} \frac{d^2 f_3}{dz^2} = -k_3^2$$

avec :

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = k^2$$

2. Chacune de ces équations différentielles est celle d'un oscillateur harmonique. Par exemple pour  $f_1$  :

$$\frac{d^2 f_1}{dx^2} + k_1^2 f_1 = 0 \Leftrightarrow f_1(x) = A_1 \cos k_1 x + \Phi_1$$

Les conditions aux limites, des parois fixes, imposent des ventre de pression, d'où

$$f_1(x=0) = A_1 = A_1 \cos(0 + \Phi_1) \Rightarrow \Phi_1 = 0$$

en  $x = d_1$  :

$$f_1(x=d_1) = A_1 = A_1 \cos(k_1 d_1) \Rightarrow k_1 = \frac{n_1 \pi}{d_1}$$

De même pour  $f_2$  et  $f_3$

3.

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 = \pi^2 \left( \frac{n_1^2}{d_1^2} + \frac{n_2^2}{d_2^2} + \frac{n_3^2}{d_3^2} \right)$$

TD 10 - Éléments de correction

Relation dispersion de l'équation de Schrödinger

L'équation de Schrodinger pour une particule libre se déplaçant selon une seule dimension est :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

1. On injecte dans l'équation d'onde la forme générale d'une onde plane harmonique<sup>21</sup> :

$$-i\hbar(i\omega) = -\frac{\hbar^2}{2m}(-k^2)$$

et donc :

$$\hbar\omega = \frac{k^2 \hbar^2}{2m}$$

ou encore :

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar} \omega$$

2. Relation de Planck :

$$E = \hbar\omega$$

relation de De Broglie :

$$p = \hbar k$$

et donc :

$$E = p^2/2m \Leftrightarrow \hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

21. Sous forme complexe pou simplifier les calculs

3. Oui, la relation de dispersion n'est pas linéaire.

4.

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar}{2m}k$$

et

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\hbar k}{m} = p/m$$

5. De la vitesse de phase  $v_\varphi$  ou de la vitesse de groupe  $v_g$  laquelle des deux correspond à l'expression classique de la vitesse  $v = p/m$ ? Expliquer pourquoi une onde plane ne peut pas décrire une particule partiellement localisée dans le temps et l'espace.

### Accordage d'un piano

Lorsque l'on prend en compte le fait qu'une corde n'est pas inextensible, ou dit autrement qu'elle se comporte aussi comme un élastique avec une force de rappel horizontale lorsqu'on lui applique une tension  $T_0$ , l'équation d'onde devient :

$$\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = c^2 \left[ \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial^4 a}{\partial x^4} \right]$$

où  $\alpha$  dépend de différent paramètre de la corde (sa surface, le module de Young, etc).

1. On injecte dans l'équation d'onde la forme générale d'une onde plane harmonique<sup>22</sup> :

$$\omega^2 = c^2 k^2 - \alpha k^4 = k^2(c^2 - \alpha k^2)$$

2.

$$v_\varphi^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = c^2 - \alpha k^2 \quad \text{et} \quad v_\varphi = \sqrt{c^2 - \alpha k^2}$$

La vitesse de groupe  $v_g$  d'obtient en différentiant la relation de dispersion :

$$2\omega d\omega = 2c^2 k dk - 4\alpha k^3 dk$$

et par définition :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{2c^2 k - 4\alpha k^3}{\omega} = \frac{2c^2 k - 4\alpha k^3}{k\sqrt{c^2 - \alpha k^2}} = \frac{2c^2 - 4\alpha k^2}{\sqrt{c^2 - \alpha k^2}}$$

(a) Voir chapitre 9

(b) Comme au chapitre 9, on trouve qu'il faut que :

$$\sin kL = 0$$

et donc le nombre d'onde  $k_n$  est quantifié :

$$k_n = n \frac{\pi}{L}$$

Les pulsations s'obtiennent via la relation de dispersion associée :

$$\omega_n = k_n \sqrt{c^2 - \alpha k_n^2} = n \frac{\pi}{L} \sqrt{c^2 - \alpha n^2 \frac{\pi^2}{L^2}}$$

3.

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{2 \frac{\pi}{L} \sqrt{c^2 - \alpha 4 \frac{\pi^2}{L^2}}}{1 \times \frac{\pi}{L} \sqrt{c^2 - \alpha \times 1 \times \frac{\pi^2}{L^2}}} = 2 \times \frac{\sqrt{c^2 - 4\alpha \frac{\pi^2}{L^2}}}{\sqrt{c^2 - \alpha \frac{\pi^2}{L^2}}}$$

4. (a)

22. Sous forme complexe pou simplifier les calculs

- ① 1) La vitesse du piston doit être la même que celle des fluides en son contact.  
 - A gauche du piston ( $x=0^-$ ) il y a superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie.  
 La vitesse du fluide à gauche est donc, en  $x=0^-$  :  $U_g(x=0^-, t) = V_0 e^{j\omega t} + \Gamma V_0 e^{j\omega t}$ .  
 - A droite du piston ( $x=0^+$ ), il n'y a que l'onde transmise.

La vitesse du fluide à droite est donc, en  $x=0^+$  :  $U_d(x=0^+, t) = \underline{\Gamma} V_0 e^{j\omega t}$

Donc  $U_{\text{piston}}(t) = U_g(x=0^-, t) = U_d(x=0^+, t) \Rightarrow U_{\text{piston}}(t) = (1 + \Gamma) V_0 e^{j\omega t} = \underline{\Gamma} V_0 e^{j\omega t}$

et donc  $\boxed{1 + \Gamma = \underline{\Gamma}} \quad (1)$

L'accélération du piston est  $\frac{dU_{\text{piston}}}{dt} = \frac{dU_d}{dt} = j\omega \underline{\Gamma} V_0 e^{j\omega t}$

- 2) le piston est soumis aux forces pressantes à droite et à gauche (son poids étant compensé par la réaction normale)

Donc  $m \frac{dU_{\text{piston}}}{dt} = S (P_{\text{gauche}}(x, t) - P_{\text{droite}}(x, t)) = S (P_{\text{gauche}} - P_{\text{droite}})_{(x=0, t)}$

Il faut déterminer les superpositions acoustiques liées aux différentes ondes.

Onde incidente progressive :  $p_i(x, t) = + Z_{\text{opp}} U_i(x, t) = \mu_0 c V_0 e^{j(\omega t - kx)}$

Onde réfléchie régressive :  $p_r(x, t) = - Z_{\text{opp}} U_r(x, t) = -\mu_0 c \Gamma V_0 e^{j(\omega t + kx)}$

Onde transmise progressive :  $p_t(x, t) = + Z_{\text{opp}} U_t(x, t) = \mu_0 c \underline{\Gamma} V_0 e^{j(\omega t - kx)}$

Donc  $P_{\text{gauche}}(x=0^-, t) = p_i(x=0^-, t) + p_r(x=0^-, t) = \mu_0 c V_0 (1 - \Gamma) e^{j\omega t}$

$P_{\text{droite}}(x=0^+, t) = p_t(x=0^+, t) = \mu_0 c \underline{\Gamma} V_0 e^{j\omega t}$

Et donc, TCN :  $m \frac{dU_{\text{piston}}}{dt} = j\omega \underline{\Gamma} V_0 m = \mu_0 c V_0 S (1 - \Gamma - \underline{\Gamma}) e^{j\omega t}$

soit  $\boxed{1 - \Gamma - \underline{\Gamma} = \frac{j m \omega}{\mu_0 c S} \underline{\Gamma}} \quad (2)$

(1) donc  $\Gamma = \underline{\Gamma} - 1$  : (2)  $\Rightarrow 2 = (2 + \frac{j m \omega}{\mu_0 c S}) \underline{\Gamma} \Rightarrow \underline{\Gamma} = \frac{1}{1 + \frac{j m \omega}{2 \mu_0 c S}}$

Posons  $\omega_0 = \frac{2 \mu_0 c S}{m}$  ,  $\underline{\Gamma} = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$  : transfert passe-bas du 1<sup>er</sup> ordre

(1) donc aussi  $\Gamma - 1 = \Gamma = \frac{-j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$  : transfert passe-haut du 1<sup>er</sup> ordre

si  $m \rightarrow +\infty$ ,  $\omega_0 \rightarrow 0$ ,  $\underline{\Gamma} \rightarrow 0$  et  $\Gamma \rightarrow 1$  : c'est la réflexion sur obstacle fixe.

3)  $I_{\text{réfléchi}} = \langle \|\vec{R}_{\text{réfléchi}}\| \rangle = \frac{1}{2} Z_{\text{opp}} (r V_0)^2$

$I_{\text{incident}} = \langle \|\vec{R}_{\text{incident}}\| \rangle = \frac{1}{2} Z_{\text{opp}} V_0^2$

$I_{\text{transmis}} = \langle \|\vec{R}_{\text{transmis}}\| \rangle = \frac{1}{2} |t V_0|^2$

Où  $\frac{I_{refl\acute{e}ch\acute{e}}}{I_{inc}} = |r|^2 = \frac{(\omega/\omega_0)^2}{1 + (\omega/\omega_0)^2} = R$  ; en dB :  $R_{dB} = 10 \log R$

$\frac{I_{transmise}}{I_{inc}} = |t|^2 = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_0)^2} = T$  ; en dB :  $T_{dB} = 10 \log T$

Rem : conservation de l'énergie :  $1 = R + T$

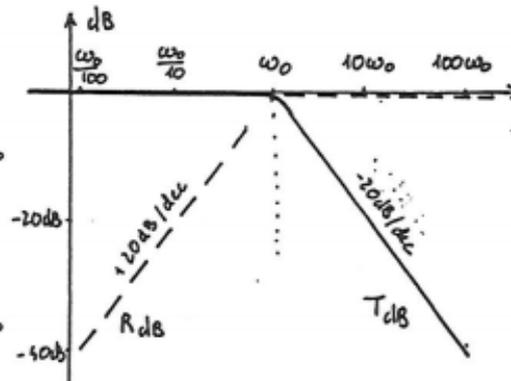
Diagramme de Bode

$\omega \ll \omega_0$  (BF) :  $R \sim (\frac{\omega}{\omega_0})^2 \Rightarrow R_{dB} = +20 \log \frac{\omega}{\omega_0}$

$T \sim 1 \Rightarrow T_{dB} = +0 \text{ dB}$

$\omega \gg \omega_0$  (HF) :  $R \sim 1 \Rightarrow R_{dB} = 0 \text{ dB}$

$T \sim 1/(\frac{\omega}{\omega_0})^2 \Rightarrow T_{dB} = -20 \log \frac{\omega}{\omega_0}$



La transmission se fait bien en BF, et de plus en plus mal au-delà de  $\omega_0$   
 Une cloche transmet les sons graves, et très mal les sons aigus.

② les conditions aux limites sont : continuité des vitesses et des pressions aux deux interfaces  $x=0$  (1)/(i) et  $x=L$  (i)/(2)

\* Continuité des vitesses en  $x=0$  :  $U_2(x=0, t) = U_i(x=0, t)$

D'où  $\underline{V}_0 = \underline{A} + \underline{B}$  (1)

\* continuité des vitesses en  $x=L$  :  $U_i(x=L, t) = U_2(x=L, t)$

D'où  $\underline{A} e^{-jk_1 L} + \underline{B} e^{jk_1 L} = \underline{t} V_0 e^{-jk_2 L}$  (2)

- Champ des pressions :

milieu (1) :  $\underline{U}_1 = \underline{V}_0 e^{j(\omega t - k_1 x)} \Rightarrow p_1(x, t) = Z_1 V_0 e^{j(\omega t - k_1 x)}$

milieu (i) :  $\underline{U}_i = \underbrace{\underline{A} e^{j(\omega t - k_1 x)}}_{\text{progressive}} + \underbrace{\underline{B} e^{j(\omega t + k_1 x)}}_{\text{regressive}} \equiv \Rightarrow p_i(x, t) = Z_i (\underline{A} e^{j(\omega t - k_1 x)} - \underline{B} e^{j(\omega t + k_1 x)})$

milieu (2) :  $\underline{U}_2(x, t) = \underline{t} V_0 e^{j(\omega t - k_2 x)} \Rightarrow p_2(x, t) = Z_2 V_0 e^{j(\omega t - k_2 x)}$

\* continuité des pressions en  $x=0$  :  $p_i(x=0, t) = p_1(x=0, t)$

D'où  $\underline{Z}_1 \underline{V}_0 = \underline{Z}_i (\underline{A} - \underline{B})$  (3)

\* continuité des pressions en  $x=L$  :  $p_i(x=L, t) = p_2(x=L, t)$

D'où  $\underline{Z}_i (\underline{A} e^{-jk_1 L} - \underline{B} e^{jk_1 L}) = \underline{Z}_2 e^{-jk_2 L} \underline{t} V_0$  (4)

De (1) et (3) on tire  $\underline{A} = \frac{\underline{V}_0}{2} \left( 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_i} \right)$  ;  $\underline{B} = \frac{\underline{V}_0}{2} \left( 1 - \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_i} \right)$

$\underline{A}$  et  $\underline{B}$  sont purement réels. On réinjecte dans (2) et (4)

$$(2) \Rightarrow (Z_1 + Z_i) \frac{e^{-jk_i L}}{2} + (Z_i - Z_1) \frac{e^{jk_i L}}{2} = \underline{\underline{\epsilon}} Z_i e^{-jk_2 L}$$

$$Z_i \cos(k_i L) - j Z_1 \sin(k_i L) = \underline{\underline{\epsilon}} Z_i e^{-jk_2 L} \quad (2')$$

$$(4) \Rightarrow (Z_1 + Z_i) e^{-jk_i L} - (Z_i - Z_1) e^{jk_i L} = \underline{\underline{\epsilon}} Z_2 e^{-jk_2 L}$$

$$Z_1 \cos(k_i L) - j Z_i \sin(k_i L) = \underline{\underline{\epsilon}} Z_2 e^{-jk_2 L} \quad (4')$$

On remarque qu'on doit avoir  $Z_2 \cdot (2') = Z_i (4')$ . Avec les 1<sup>er</sup> membres :

$$\boxed{Z_2 Z_i \cos(k_i L) - j Z_2 Z_1 \sin(k_i L) = Z_1 Z_i \cos(k_i L) - j Z_i^2 \sin(k_i L)} \quad (5)$$

- L'égalité des parties imaginaires donne  $Z_i^2 = Z_1 Z_2$  (ou  $\sin k_i L = 0$ ) (6)

- L'égalité des parties réelles donne  $Z_2 Z_i = Z_1 Z_i$ , soit  $Z_2 = Z_1$ , ou  $\cos k_i L = 0$  (7)

Or, par hypothèse,  $Z_2 \neq Z_1 \Rightarrow \cos k_i L = 0 \Rightarrow k_i L = \frac{\pi}{2} [n]$

Soit  $L = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{k_i}$ , en prenant la plus faible valeur. En écrivait  $k_i = \frac{2\pi}{\lambda_i}$

on a donc  $L = \frac{\lambda_i}{4}$  : couche  $\frac{1}{4}$  d'onde ( $\lambda_i = c_i T = c_i \cdot \frac{2\pi}{\omega}$ )

Alors (7)  $\Rightarrow \boxed{Z_i = \sqrt{Z_1 Z_2}}$  et  $\sin(k_i L) = 1$

(2')  $\Rightarrow -j Z_1 = \underline{\underline{\epsilon}} Z_i e^{-jk_2 L} \Rightarrow \underline{\underline{\epsilon}} = -j e^{jk_2 L} \cdot \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}$  (complex : déphasage)

et  $A = \frac{V_0}{2} \left( 1 + \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} \right)$ ,  $B = \frac{V_0}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} \right)$

# *Un peu de Maths*

## *Développement limité*

Les termes successifs doivent :

- Permettre de s'approcher de la fonction
- Corriger les imprécisions des termes précédents



# *Le minimum vital de mécanique*

## *Cinématique*

Vitesse et accélération en coordonnée polaire

## *Dynamique*

PFD

TMC en particulier dans le cas d'un solide en rotation autour d'un axe.

## *Énergie*

Cinétique, potentielle, mécanique.



*Pendule pesant*



## *Autre type d'oscillateur*

La première partie de cours traite des oscillateurs dit quasi-linéaire, c'est à dire produisant un signal de sortie (un mouvement, un signal électrique) quasi-sinusoïdale. Ce sont les briques de bases de la propagation d'une onde d'où leur place privilégiée au sein de ce cours. Néanmoins, il existe plusieurs autres types d'oscillateur dont certains sont tout aussi importants en terme d'application physique et de répercussions dans la vie de tous les jours.

Nous allons brièvement aborder la physique de ces "autres" oscillateurs.

### *Oscillation de relaxation*

Les oscillateurs de relaxation sont partout autour de nous. Ils sont souvent une solution assez directe pour obtenir un système avec une évolution périodique dans le temps. Ils constituent donc souvent que ce soit dans nos cellules avec le rythme circadien ou dans les circuits électronique. Notons, que les oscillations obtenues ne sont pas périodique.

Il est difficile donner un processus générale qui engloberait tous les types d'oscillation de relaxation. D'un point de vue général, les oscillations de relaxations mettent en jeu de deux processus  $A$  et  $B$  parfois appelé contrainte pour  $A$  et  $B$  la relaxation.

Le processus  $A$ , la contrainte a comme caractéristique

- Un taux d'augmentation avec un temps caractéristique  $\tau_c$

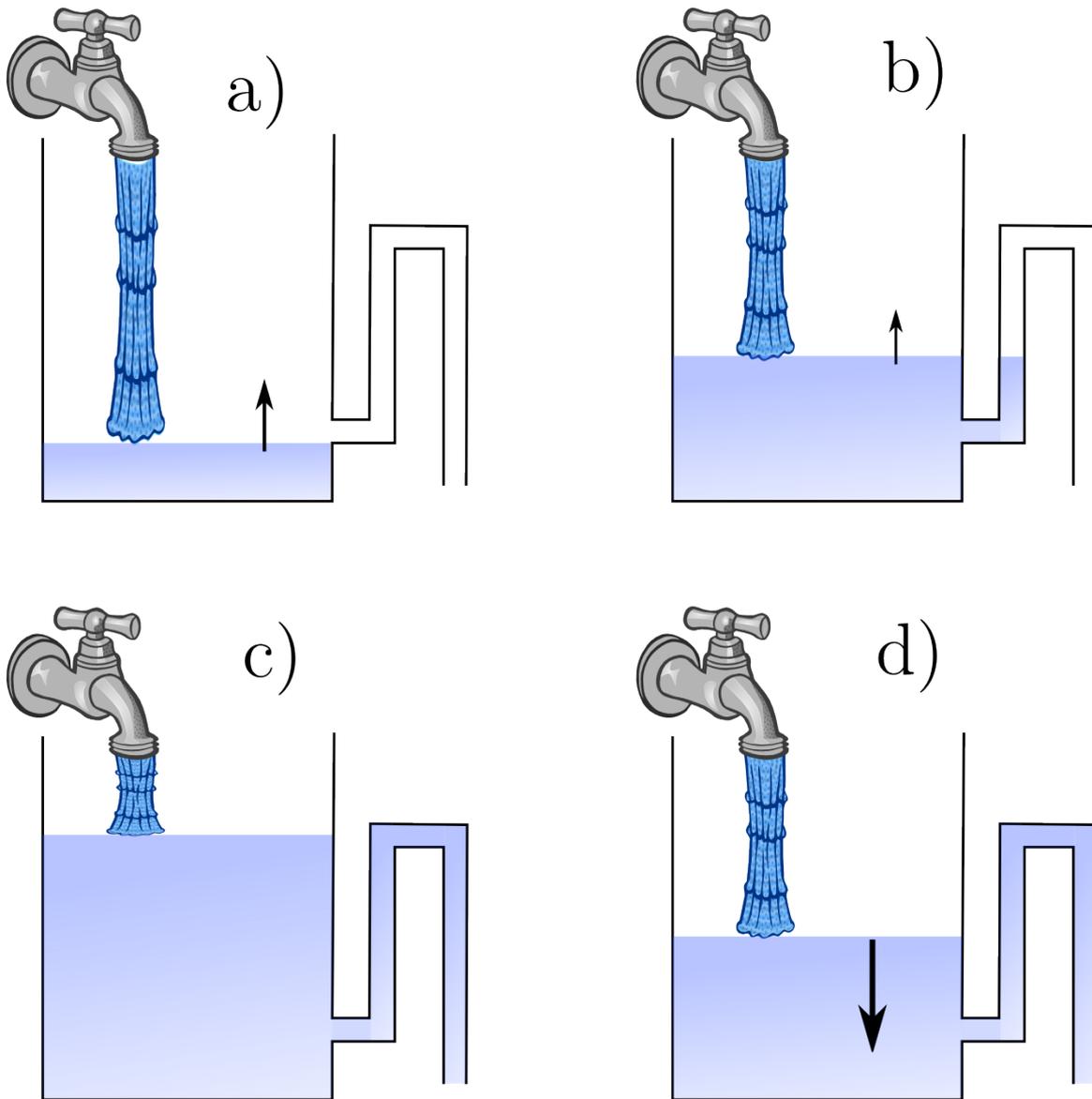
Le processus  $B$ , possède comme caractéristiques

- Un seuil d'activation  $S_a$  associé à un temps caractéristique d'activation  $\tau_a$
- Un seuil de *desactivation*  $S_b$  associé à un temps caractéristique de *desactivation*  $\tau_d$

Ces deux processus sont couplés. L'activation du processus  $A$  augmente le processus  $B$  jusqu'à un point de rupture quand  $B$  atteint son seuil d'activation  $S_a$ . Le système est alors principalement gouverné par le processus  $B$  de relaxation jusqu'à atteindre le seuil de *desactivation* de  $B$ . Le cycle peut alors reprendre.

Un exemple assez classique et le modèle proie-prédateur, avec par exemple des lapins et des renards. En l'absence de renard, le nombre de lapins augmente exponentiellement (c'est la contrainte  $A$ ). Mais, au fur et à mesure que le nombre de lapin augmente, la situation devient favorable pour les renards dont le nombre augmente. L'augmentation du nombre de renard (le phénomène de relaxation  $B$ ) a pour conséquence de diminuer le nombre de lapin. Au final, si on suit la population de lapin au cours du temps celle-ci oscille avec une fréquence fixe.

Illustrons cela par un exemple plus physique : le vase Tantale.



Un récipient est remplie d'eau par une source (un robinet par exemple), le récipient est relié à la hauteur  $h_d$  un siphon de hauteur  $h_a$  (voir fig ??)

Le processus  $A$  (la contrainte) est le remplissage du récipient. Son

temps caractéristique est fonction du débit du robinet.

Le deuxième processus est la vidange par le siphon.

- Son seuil d'activation est lié à la hauteur  $h_a$  que doit atteindre le liquide pour que le siphon démarre.
- Son seuil de désactivation est lié à la hauteur  $h_d$  que doit atteindre le niveau du liquide dans le récipient pour stopper le siphon.

Parcourons alors un cycle de cet oscillateur :

- a) et b) La citerne est remplie par le robinet jusqu'à atteindre  $h_a$ . Cela prend le temps  $\tau_a$ .
- c) Le siphon se déclenche et vide la citerne plus vite qu'elle ne se remplit<sup>23</sup>.
- d) Le niveau de la citerne baisse avec une évolution exponentielle et atteint le niveau  $h_d$ . Cela prend le temps  $\tau_d$ .

Le siphon s'arrête. On peut recommencer le cycle.

Le cycle dure le temps  $\tau = \tau_a + \tau_d$  il est présenté sur la figure A.5. Il n'est clairement pas sinusoïdale. Il est constitué d'une charge linéaire avec le temps  $\tau_a$  suivit d'une décharge exponentielle avec le temps  $\tau_b$ .

Nous allons maintenant abordé un deuxième type d'oscillation de relaxation qui vont mettre à nouveau un effet physique présentant un seuil : les frottements solides.

### Frottements solide

Les frottements solides Ce sont ces frottement ce que nous ressentons à travers "le touché". Cette capacité qui fait partie des cinq sens listé par Aristote est en fait la manifestation des interactions électrostatiques entre notre peau et la surface touchée. Ces interactions sont extrêmement complexes<sup>24</sup>, en effet à l'échelle microscopique les surfaces sont d'une part très loin d'être plane et d'autre part constituées d'entités chargés (atomes, molécules, ...) diverses et variées.

Et pourtant, à l'échelle macroscopique, toute cette complexité microscopique peut être résumée assez grossièrement par deux lois empiriques appelées lois de Coulomb<sup>25</sup> :

1. Pour mettre un objet en mouvement il faut apporter une force tangentielle  $\|F_{seuil}\|$  supérieur à un seuil. Ce seuil est fonction :
  - De la *nature du matériau* de l'objet que l'on va mettre en mouvement et de la *nature de la surface* sur laquelle il repose et qui à l'origine des frottement solides. On notera  $f_s$  le coefficient rendant compte du frottement entre les deux surfaces. Le tableau ?? donne quelques ordre de grandeur
  - L'importance de la *force pressant l'objet* sur la surface réaction normale  $\|P\|$  de la surface sur l'objet.

23. La vitesse de l'eau en sortie et donc la vidange de la citerne n'est pas constante au cours du temps. En effet, la vitesse de sortie dépend de la différence de pression entre le l'eau au niveau de la citerne et l'eau en sortie du siphon (cf Équation Bernoulli). Cette différence de pression, qui est hydrostatique, est due à la différence de hauteur. Or la hauteur du niveau dans la citerne est en train de diminuer. On a affaire à un phénomène semblable à la decharge du condensateur. Le niveau chute donc de façon exponentielle

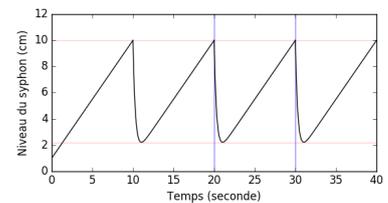


FIGURE A.5: Cycle du niveau d'eau dans le siphon. La période est indiqué entre les deux barres verticale. Le temps caractéristique de remplissage est ici de 10 s et le temps de vidange de 0.3 s

24. La science de l'étude des frottements est appelée tribologie, elle est largement toujours d'actualité et beaucoup de phénomènes restent encore inexpliqués.

25. Charles-Augustin COULOMB 1736-1806

L'objet entre en mouvement ou plutôt se met à glisser pour une force tangentielle supérieur à  $\|F_{seuil}\| > f_s \|P\|$

Du fait du principe d'action réaction, la force tangentielle  $\|F_{seuil}\|$  que l'on exerce sur l'objet est aussi égale en norme à la force de frottement tangentielle  $\|T\|$ , de même la force pressant l'objet sur la surface  $\|P\|$  (souvent la gravité) est égale en norme à la réaction normale de la surface en contact avec l'objet  $\|N\|$ .

On peut donc réécrire la condition de début de glissement :

$$\|T\| > f_s \|N\| \quad (\text{A.19})$$

26. NB : notez ici l'égalité et non une condition de seuil avec un signe >

2. Une fois l'objet en mouvement, il subit par la suite une force de frottement constante<sup>26</sup> et de moindre amplitude que la force nécessaire à démarrer le glissement :

$$\|T\| = f_d \|N\| \quad (\text{A.20})$$

Avec

$$f_d < f_s \quad (\text{A.21})$$

Comme notre expérience le confirme, une fois l'objet en mouvement il y a moins d'énergie à apporter pour qu'il continue à être en mouvement malgré les frottements solides.

27. Et par conséquent il est aussi difficile de pousser une lourde caisse sur le sol, qu'elle soit debout ou couchée

Il est intéressant de noter que la force nécessaire pour démarrer le glissement ne dépend pas de la surface de l'objet. Mettre en mouvement un gros bloc au sol demande autant d'effort qu'un petit bloc<sup>27</sup> pour peu que leur poids soit égale (et donc  $\|N\|$ )

Ces deux lois macroscopiques peuvent s'expliquer à l'échelle microscopiques.

La lubrification consiste à transformer des frottements solide (phénomène à seuil) en frottement liquide (dépendant de la vitesse et donc nul au démarrage et ensuite faible à faible vitesse).

Force de frottement solides joue un rôle considérable dans la vie de tout les jours. Marche, vissage.

Oscillation de relaxation.

Les forces de frottements

Le bruit émit par un objet frottant sur une surface, comme lorsque l'on traîne une caisse sur le sol, une porte qui grince ou qu'une craie qui crisse sur un tableau noir, provient d'oscillation de relaxation due aux frottements. Plus précisément, il s'agit de la succession et d'adhérence et de glissement qui se font à un fréquence bien précise dépendant des coefficients de frottements et de la vitesse à laquelle on déplace l'objet (voir exercice ??).

### *L'oscillateur amorti par frottement solide*

On considère un point materiel de masse  $m$  glissant selon l'axe  $x$ . Il est soumis :

- Une force de rappel élastique  $F = -kxe_x$
- Une force de frottement solide  $R$  caractérisée par un coefficient de frottement  $f$ . Nous confondrons ici coefficient statique et coefficient dynamique. On désigne par  $R$  et  $N$  les composantes tangentielle et normale de  $R$ .
- son poids

Par projection du PFD sur les axes  $Ox$  et  $Oz$  on obtient :

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx + T \\ 0 &= N - mg \Leftrightarrow N = mg \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Les lois de Coulomb, indique que les frottements solide empêcheront le mouvement, c'est à dire rester à l'équilibre, si :

$$\frac{T}{N} \underbrace{\leq}_\text{Equilibre} f$$

S'il y a mouvement, les mêmes lois nous donne :

$$|T| \underbrace{=} \text{Mouvement} fN = fmg$$

L'équation du mouvement peut donc être mise sous la forme :

$$m\ddot{x} = -kx + \epsilon fmg \quad (\text{A.23})$$

avec

$$\epsilon = \pm 1 \quad \text{et} \quad \epsilon \dot{x} < 0 \quad (\text{A.24})$$

Ces deux dernières équations qui traduisent des phénomènes avec des seuils rend l'équation et donc le système non linéaire.

Pour résoudre équation, nous allons distinguer plusieurs phase. Commençons par le début du mouvement avec par exemple comme conditions initiales :

$$x(t=0) = x_0 \quad \text{et} \quad \dot{x}(t=0) = 0$$

Première question : le point va-t-il rester à l'équilibre ou se mettre en mouvement ? Cela dépend de l'intensité de la force de rappel, est-elle plus forte que la force de frottement ? Si l'objet reste à l'équilibre :

$$0 = -kx_0 + T \quad \text{et} \quad N = mg$$

La condition  $|T|/N < f$  s'écrit alors :

$$|x_0| < a \quad \text{avec} \quad a = \frac{fmg}{k}$$

Autrement dit, si la coordonnée initiale  $x_0$  est inférieure à  $a$ , la masse  $m$  reste à l'équilibre. Au contraire si  $|x_0| > a$ , la masse  $m$  se met en mouvement.

On peut réécrire l'équation du mouvement avec ces nouvelles variables et  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  :

$$\ddot{x} = -\omega_0^2(x - \epsilon a) \quad (\text{A.25})$$

Pour la première phase, fixons  $x_0 > 0$  (déplacement initial vers la droite), alors la force de rappel met la masse  $m$  en mouvement dans la direction diminuant  $x$  (vers la gauche). On a donc  $\dot{x} < 0$  et donc  $\epsilon > 0 \Leftrightarrow \epsilon = 1$ . L'équation du mouvement dans cette phase (c'est à dire tant que  $\dot{x} < 0$ ) est :

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x + \omega_0^2 a$$

et on obtient alors l'équation du mouvement et la vitesse :

$$\begin{aligned} x - a &= (x_0 - a) \cos \omega_0 t \\ \dot{x} &= -\omega_0 (x_0 - a) \sin \omega_0 t \end{aligned} \tag{A.26}$$

Le mouvement dans cette phase est donc un bout de mouvement harmonique sinusoïdale centré sur la position  $x = a$  et non  $x = 0$ . Cette phase s'arrête lorsque la vitesse s'annule puis change de sens, c'est à dire au temps  $t_1 = \pi/\omega_0$ . A ce moment  $\epsilon$  change de signe, et  $x_1 = -x_0 + 2a$  au lieu de  $x(t_1) = -x_0$  dans le cas de l'oscillateur harmonique, l'oscillateur a perdu  $1/2k(2a)^2$  Joules d'énergie potentielle. Dans la deuxième phase, pour  $t > t_1$  l'équation du différentielle devient :

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - \omega_0^2 a$$

et l'équation du mouvement :

$$x(t) = -a + (x_1 - a) \cos \omega_0 t$$

A chaque pseudo-oscillation, l'amplitude des oscillations diminue de  $4a$ , jusque'à ce que la position  $|x_n|$  soit inférieure à  $a$  et le mouvement s'arrête alors.

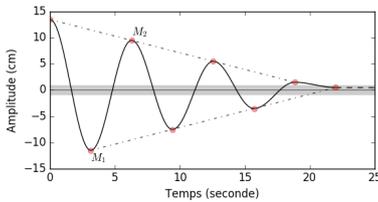


FIGURE A.6:

*Oscillateur paramétrique*

*Oscillation entretenues*

*Exercice*

*Équilibre sur un plan incliné; phénomènes d'arc-boutement*

*Oscillateur avec frottement solide*

*La règle de Sommerfeld*

*Methode de Fresnel*



## *Compléments au chapitre 3*

*Coordonnées normales d'oscillateur couplés*

*Oscillateurs couplés en régime forcé : cas général*



*Ingrédients pour la propagation d'une  
onde : Localité, symétrie et invariance  
temporelle*



*Détails du calcul des modes de la chaîne  
de  $N$  oscillateurs*



*Quelques notes sur le calcul numérique  
d'une transformée de Fourier*